

10・3 制御系の安定性

制御系の応答が最も望ましい状態になるように、制御器のパラメータを決定する必要がある。ここで、先の図10・8、10・9に見られるように、フィードバック制御を行うことによって、かえって制御系が不安定になる場合もでてくる。このような不安定な制御系は絶対に避けなければならない。

デジタルシミュレーションによって、制御系の応答を求めることは容易になった。しかし、制御系が安定から不安定に移行する境界値は、種々の制御器パラメータの組み合わせに対し、それぞれ過渡応答を数値計算して、試行錯誤的に求めなければならない。これには、かなりの労力を要する。

制御系の安定性(stability)を理論的・解析的に求めることは、制御系の解析・設計問題の最も重要な課題の一つで、これまでに多くの方法が提案されている。以下にその方法を説明する。

まずはじめに、どのようにして不安定な応答が生まれるか、を考えてみる。ここで、不安定な応答とは次のように定義する*。「過渡応答において時間の経過とともに、系の出力が正または負の方向に無限大になること」

いま、次のような1次遅れ、あるいは2次遅れの伝達関数を持つプロセスに、インパルス入力が入った場合の応答を求める。

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a} \quad (10\cdot22)$$

$$G_2(s) = \frac{b_0}{a_0s^2 + a_1s + a_2} = \frac{k}{(s+a)^2 + k^2} \quad (10\cdot23)$$

インパルス入力のラプラス変換は1なので、伝達関数自身を逆ラプラス変換するとインパルス応答が求まる。

* 安定・不安定の定義に関しては、もっと厳密な定義がなされているが、ここでは最も簡単な定義を示した。

$$y_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\} = e^{-at} \quad (10 \cdot 24)$$

$$y_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{(s+a)^2 + k^2} \right\} = e^{-at} \sin(kt) \quad (10 \cdot 25)$$

この応答を、 a をパラメータとして計算し、図示すると次のようになる。

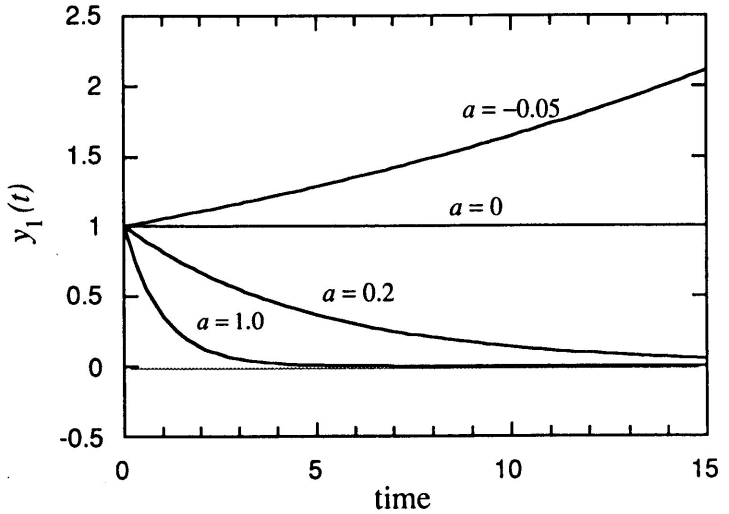


図 10・11 1次遅れ系のインパルス応答

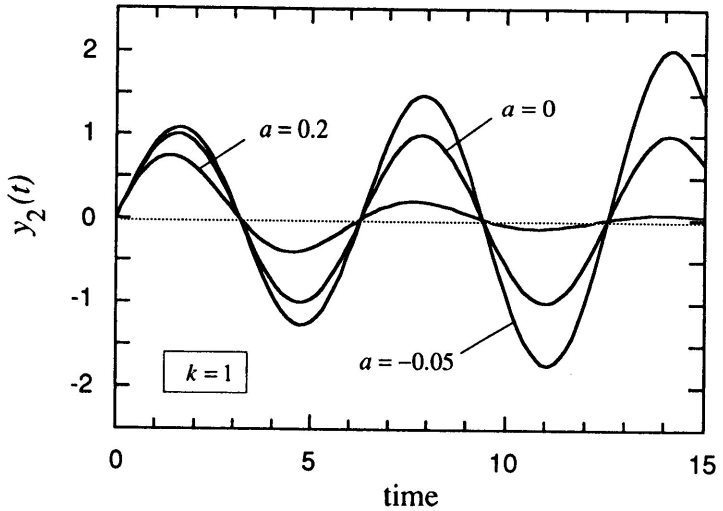


図 10-12 2次遅れ系のインパルス応答

図10-11, 10-12の応答を見ると, a が正の場合には応答は収束するが, a が負となると応答は発散する. その収束・発散の境界は, $a=0$ のときである. このパラメータ a は, 伝達関数, (10-22), (10-23)式中の分母に含まれる. 伝達関数の分母をゼロとおいた方程式は, 特性方程式(*characteristic equation*)と呼ばれ, 複素数 s の代数方程式となる. この特性方程式の根の大きさが, 応答の収束・発散に係わってくる. 上記の伝達関数の特性方程式とその根は次のようになる.

$$1 \text{ 次遅れ系: } s+a=0, \quad s=-a$$

$$2 \text{ 次遅れ系: } (s+a)^2+k^2=0, \quad s_1=-a+kj, \quad s_2=-a-kj$$

2次遅れ系の特性方程式は、 s について2次の方程式となり、二つの根 s_1, s_2 をもち共役複素数となっている。これらの系が安定となるためには、すなわちインパルス応答が収束するためには、特性方程式の根の実数部分、 $[-a]$ が負となる($a > 0$)必要がある。共役複素根の虚数部、 $[k]$ は、(10.25)式からわかるように、振動成分の周期を決定する。

上記の関係を一般化すると、次のようになる。下記のような n 次の伝達関数を持つプロセスは、部分分数に分けると、(10.22)、(10.23)式で表される1次および2次遅れ要素の伝達関数の和となる。

$$G_n(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (10.26)$$

そこで、このプロセスが安定な応答を示すためには、その特性方程式

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (10.27)$$

の n 個の根の実数部がすべて負になる必要がある。

フィードバック制御系の安定性を調べるためには、まず総括伝達関数を求める。次に、その分母をゼロとおいた特性方程式の根をすべて求めて、根の符号を調べる。代数方程式の根は、次数が大きくなると、一般解として求まらない。そこで、代数方程式の根と係数との関係を使って、根の符号(根の実数部が負となる条件)を調べる方法が提案された。ここでは、ラウスの安定性判定法(*Routh stability criterion*)について説明する*。

* ラウスの判定法と同等の判定法に、フルビッツの安定性判定法がある。

(Hurwitz criterion)

詳細は参考書を参照のこと。

一般的な特性方程式として、(10.27)式が与えられた場合、この式が安定根を持つための条件は、次の二つである。

条件1：特性方程式の係数($a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$)がすべて同じ符号を持つ。

条件2：次の数表の第一列目の要素がすべて正となる。

(例として、 $n=6$ の場合を考える)

$$\begin{array}{cccc}
 a_0, & a_2, & a_4, & a_6, \\
 a_1, & a_3, & a_5, & 0 \\
 b_1, & b_2, & b_3, & 0 \\
 c_1, & c_2, & 0 & \\
 d_1, & d_2, & 0 & \\
 e_1, & 0 & & \\
 f_1, & 0 & &
 \end{array}$$

ここで、第1, 2行は特性方程式の係数である。第3行目以下は次のように計算する。

$$\begin{cases} b_1 = (a_1 a_2 - a_0 a_3) / a_1 \\ b_2 = (a_1 a_4 - a_0 a_5) / a_1 \\ b_3 = (a_1 a_6 - a_0 \cdot 0) / a_1 = a_6 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = (b_1 a_3 - a_1 b_2) / b_1 \\ c_2 = (b_1 a_5 - a_1 b_3) / b_1 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = (c_1 b_2 - b_1 c_2) / c_1 \\ d_2 = (c_1 b_3 - b_1 \cdot 0) / c_1 = b_3 = a_6 \end{cases}$$

$$e_1 = (d_1 c_2 - c_1 d_2) / d_1$$

$$f_1 = (e_1 d_2 - d_1 \cdot 0) / e_1 = d_2 = a_6$$

数表の第1列の要素 $[a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1]$ がすべて正のとき、系は安定となる。

制御系の特性方程式は、総括伝達関数の分母をゼロとおいたものである。この式の中に、制御器のパラメータが未定のままで含まれていても、上記の方法を適用することが可能である。したがって、この方法によって、制御系の安定・不安定の限界となるパラメータの値を決定することができる。

例として、図10・7に示したフィードバック制御系 (II) における、比例制御の限界パラメータを求める手順を以下に示す。プロセスの特性として、先のシミュレーションを行った条件と同じとし ($K_D = K_P = 1, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 0.2$)，外乱と制御変数との間の総括伝達関数を求める。

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{D(s)} &= \frac{\frac{1}{(0.5s+1)(s+1)}}{1+K_C \frac{1}{(0.5s+1)(s+1)(0.2s+1)}} \\ &= \frac{0.2s+1}{(0.5s+1)(s+1)(0.2s+1)+K_C} \\ &= \frac{0.2s+1}{0.1s^3+0.8s^2+1.7s+1+K_C} \end{aligned} \quad (10\cdot28)$$

特性方程式は、

$$0.1s^3+0.8s^2+1.7s+(1+K_C)=0 \quad (10\cdot29)$$

* フィードバック制御ループにおいて、検出信号はマイナスとなって戻ってくる。このときには、制御器のパラメータは全て正の値をとる。

比例制御のゲイン定数 K_C は正なので*，ラウスの安定性判定法の条件1は満足する。そこで次に、数表を作る。

0.1	1.7
0.8	$(1+K_C)$
b_1	0
c_1	0

ここで、

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{0.8 \times 1.7 - 0.1 \times (1+K_C)}{0.8} = 1.7 - \frac{0.1}{0.8}(1+K_C) \\ c_1 &= \frac{b_1 \times (1+K_C) - 0.8 \times 0}{b_1} = (1+K_C) \end{aligned}$$

数表の第1行目がすべて正であれば、制御系は安定となる。

K_C は正なので、 $c_1 = 1 + K_C > 0$ となる。そこで、

$$b_1 = 1.7 - \frac{0.1}{0.8}(1 + K_C) > 0$$

から、系が安定となるための比例ゲインの取り得る範囲は、 $12.6 > K_C > 0$ となる。

先に示した図10・8のシミュレーションによる応答では、 K_C が10の場合は安定で、20では不安定になる。この結果は、上記の解析結果と対応している。

特性方程式が複素数 s の代数方程式で与えられる場合には、ラウスの解析法は非常に有効な方法である。しかし、制御ループの中に、非線型要素であるむだ時間要素を含む場合には、上記の方法は適用できない。このような場合には、後に述べる周波数応答法に基づく安定性の判定方法が有効となる。

未定のパラメータを含む特性方程式から、系の安定性を判定する他の方法として、根軌跡法(*root-locus analysis*)があるが、本書では省略する。