１１　周波数応答法に基づく制御系の設計

周波数応答は，先の第５章で述べたように，プロセスの動特性を表わす方法の一つである．プロセス部，検出部，操作部，制御器それぞれの周波数特性を用いて，フィードバック制御系全体の周波数特性を求めると，制御系の安定性に関する情報が得られる．プロセス制御でよく見られるむだ時間要素も，その周波数特性は容易に求めることができる．そのため，この非線型要素を含む制御系の安定性についても，周波数応答法に基づいて解析することができる．

過渡応答法に基づく制御器のパラメータ設定法について，先の第１０章で説明した．そこでは，制御系の安定限界を求めて，経験的な知見に基づいてパラメータを決定した．周波数応答法によれば，制御系の安定性の度合（安定性の大小・安定度）を定量的な目安として，制御器のパラメータを設定することが可能となる．

１１・１　フィードバック制御系内のサイン状信号の伝達

周波数特性は，入力のサイン状信号に対する，出力信号の振幅および位相によって表現される．この信号が，フィードバック系内を一巡する様子を眺めてみる．いま，フィードバック制御系において，制御器の手動／自動切換部を手動に切換え，ここにサイン状の信号を送る場合を想定する．このとき，フィードバック系内を一巡して制御演算部から出てくる信号の振幅と位相に注目する．

フィードバック制御系の一例として，プロセスは１次遅れ要素で，検出部はむだ時間要素，操作部の遅れは無視し，比例制御を行う系

を想定し，図11·1のような特性を持った系を考える．

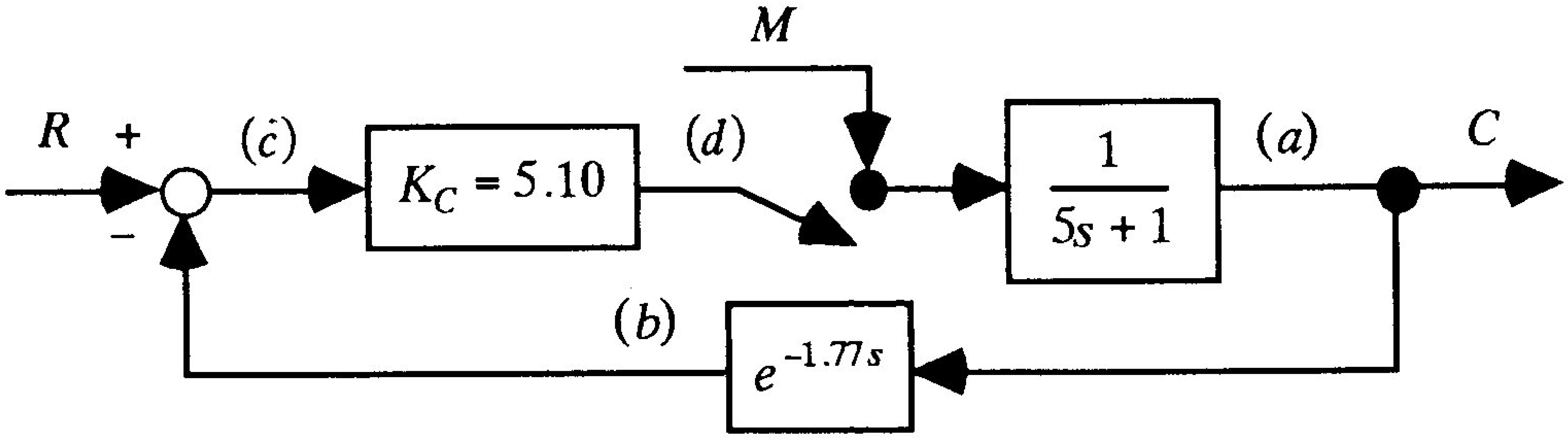


図 11·1　フィードバック制御系のブロック線図（手動入力）

ここで，手動入力信号として，$M(t)=\sin(t)$ の信号［周波数 $\omega=1\,rad/time$ のサイン状信号］が入った場合を想定する．時間がじゅうぶん経過して定常応答が得られたとき，手動入力を打ち切り同時に制御器を自動に切り換えるものとする．最後のサイン入力（半分のサイン入力で打ち切ったとする）に対する，各ブロックの出力信号を求めてみる．

(a) プロセスの出口

・振幅：$\dfrac{1}{\sqrt{1+(5\omega)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}=0.196$

・位相：$-\tan^{-1}(5\omega)=-\tan^{-1}(5)=-1.373\text{ rad}(-78.8\text{ deg})$

(b) 検出部の出口

・振幅：$\dfrac{1}{\sqrt{1+(5\omega)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}=0.196$

・位相：$-\tan^{-1}(5\omega)-1.77\omega=-\tan^{-1}(5)-1.77=-\pi\text{ rad}$

(-180 deg)

(c) 比較部の出口

・振幅：$\dfrac{-1}{\sqrt{1+(5\omega)^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{26}} = -0.196$

・位相：$-\pi$ rad (-180 deg)

(d)制御器の出口

・振幅：$\dfrac{-K_C}{\sqrt{1+(5\omega)^2}} = \dfrac{-5.10}{\sqrt{26}} = -1.00$

・位相：$-\pi$ rad (-180 deg)

上記の計算結果を図示してみると，図11·2のようになる．

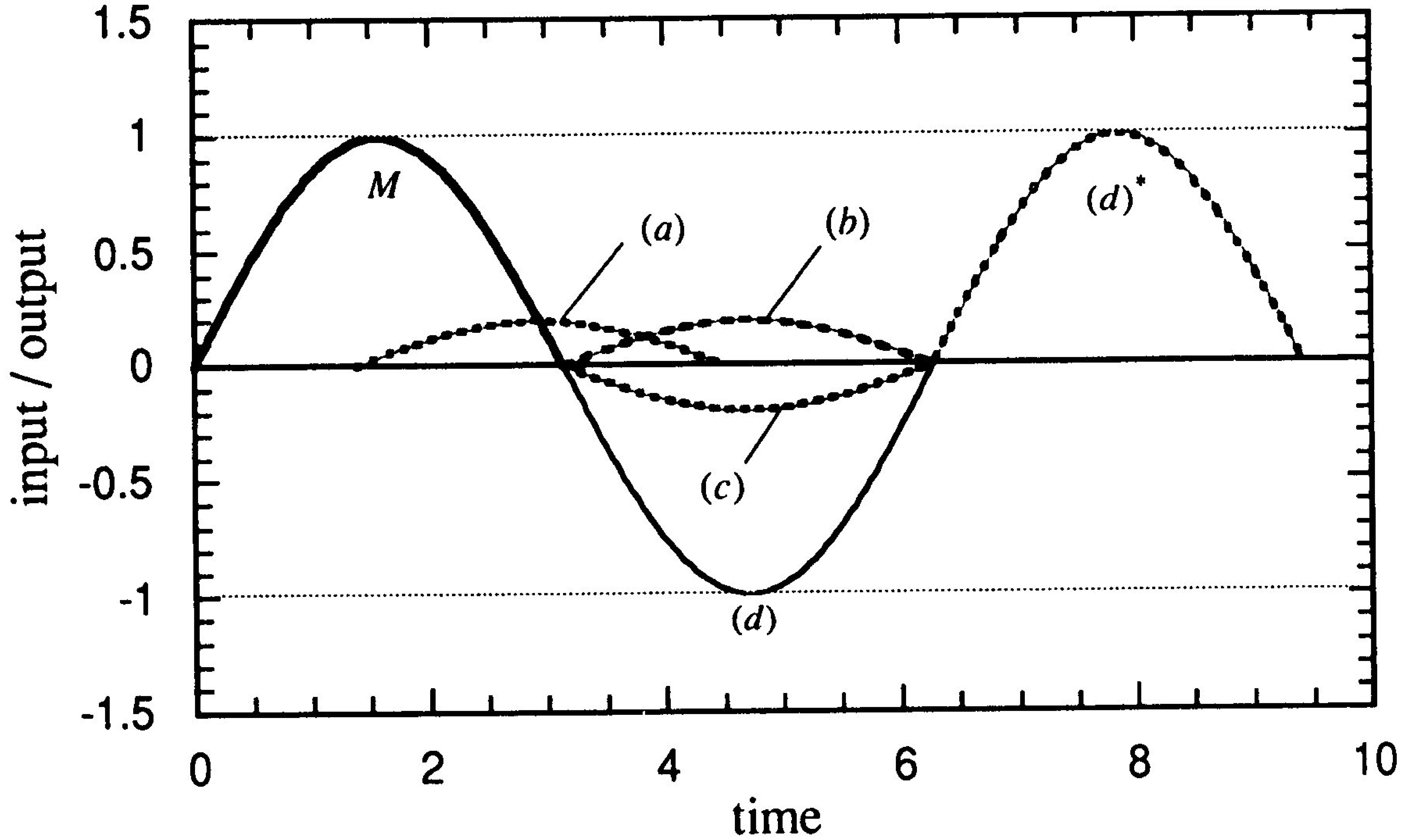


図 11·2　　制御系内のサイン状信号の伝達

最後のサイン入力信号 M が制御系に入ったとき，制御器を自動に切り替えたとすると，制御ループの中には(d)の信号（信号 M に対して，位相が π rad［1/2周期］遅れていて，大きさは同じで［振

幅：1］符号の異なる信号）が伝達される．次に，この(d)の信号が制御ループ内を伝達されると，$(d)^*$の信号となる．このようにして順次信号が伝わり，制御系の中にはサイン状の持続信号が伝達される．

上記の例で，制御器の比例ゲインK_Cを5.10より大きくすると，一巡したサイン状信号の振幅は，前の信号より大きくなる．次に，この信号が制御系内を一巡したときには，より大きな振幅を持った信号となって戻ってくる．したがって応答は，時間の経過とともに順次大きくなって，発散してしまう．その結果，制御系は不安定となる．

検出部のむだ時間が1.77より小さい場合には，一巡したサイン状信号の遅れ（位相：ϕ）は，入力信号の1/2周期$[-\pi$ rad, $(-180°)]$よりは小さくなる．したがって，この信号を順次一巡させて重ね合わせてゆくと，サイン状の減衰した信号となり，制御系は安定となる．

以上のことから，フィードバック制御系の安定限界は，周波数特性に基づけば，次のように表すことができる．フィードバックループ内の各要素をサイン状信号が通過したとき，ある周波数の信号に対して，位相が180°遅れて，かつその振幅が1となる場合，すなわち，制御系の一巡伝達関数の周波数特性を調べて，位相が$-\pi$となる周波数でゲイン特性が1となる場合，制御系は安定限界にある．

１１・２　周波数応答に基づく安定性の評価

前節で述べた制御系の安定限界を調べる方法は，ボードの安定性**判定基準**（*Bode stability criterion*）と云われている．制御系の一巡伝達関数の周波数特性を調べて，その位相が$-\pi$となる周波数を**限界周波数**（ω_{CO}: *crossover frequency*）と呼ぶ．すると，ボードの安定性判定基準は，次のようにいうことができる．「フィードバック制御系が安定となるためには，一巡伝達関数の周波数ゲイン特性が，限界周波数において1より小さい．」この関係を式で表現すると，次のようになる．フィードバック制御系が安定となるためには，

$$M = |G_l(j\omega_{CO})| < 1, \qquad \angle G_l(j\omega_{CO}) = -\pi \qquad (11\cdot1)$$

が成立すればよい．

ボード線図を使って上記の安定性判定基準を示すと，図11･3のようになる．ここで，限界周波数におけるゲイン特性の振幅比の値Mとゲイン1との間を，**ゲイン余有**（*gain margin*, GM と略記）と呼び，制御系の安定性の程度，すなわち安定度を表す．ゲイン余有を数値として表す場合，以下のように定義する．

$$\mathrm{GM} = 1/M$$

あるいは，　　　　　　　　　　　　　　　　　　(11･2)

$$\mathrm{GM} = -20\log|M| \quad [\mathrm{dB}]$$

通常，プロセス制御系の設計にあたっては，GM＝1.4～2.8 (3～9 dB)となるよう制御器のパラメータを設定する．機械的な制御問題のサーボ機構の設計においては，GM＝4～10 (12～20 *dB*)とすることが一つの目安となる．

一巡伝達関数のゲイン特性が1を示す周波数を$\omega_{(1)}$とし，このときの位相$\phi_{(1)}$が-180°より大きければ，制御系は安定となる．すなわち，ボードの安定性判定基準を(11･1)式とは異なる表現に変える

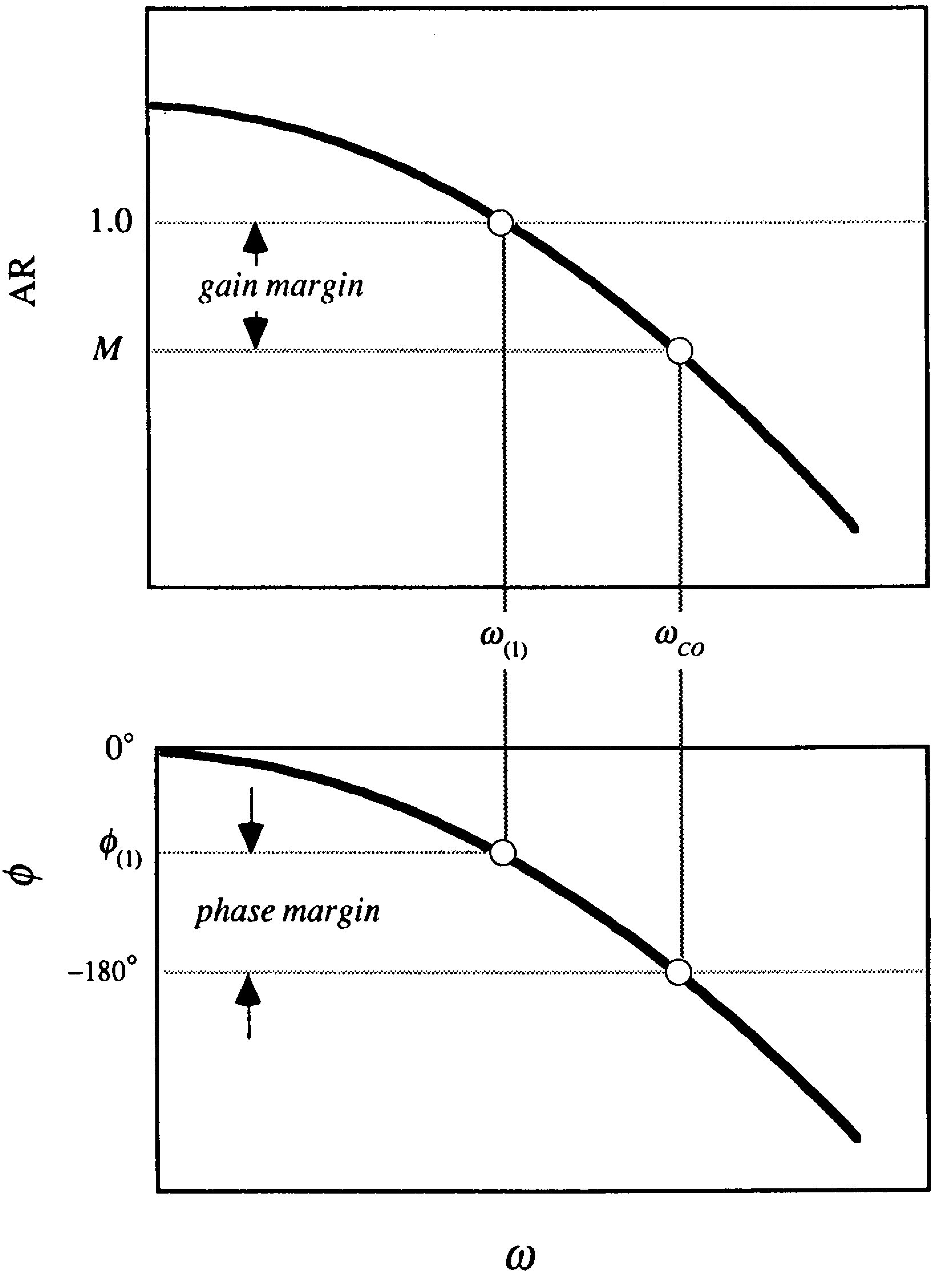


図 11·3　　ボードの安定性判定基準

と，次のようになる．

$$\left|G_l(j\omega_{(1)})\right| = 1, \quad \phi_{(1)} = \angle G_l(j\omega_{(1)}) > -\pi \tag{11·3}$$

の条件が成立すれば，フィードバック制御系は安定となる．そこで，安定性の程度を示すパラメータとして，次のような**位相余有**（*phase margin*, PMと略記）を定義する．

$$\mathrm{PM} = 180° - \left|\phi_{(1)}\right| \tag{11·4}$$

位相余有をボード線図上で示すと，図11·3のようになる．通常PMは，プロセス制御では16°～80°，サーボ機構では，40°～65°が目安といわれている．

先に図10·6にて示した，むだ時間要素を含む制御系の安定性の判定方法について説明する．プロセスおよび検出部の特性を以下のように定める．

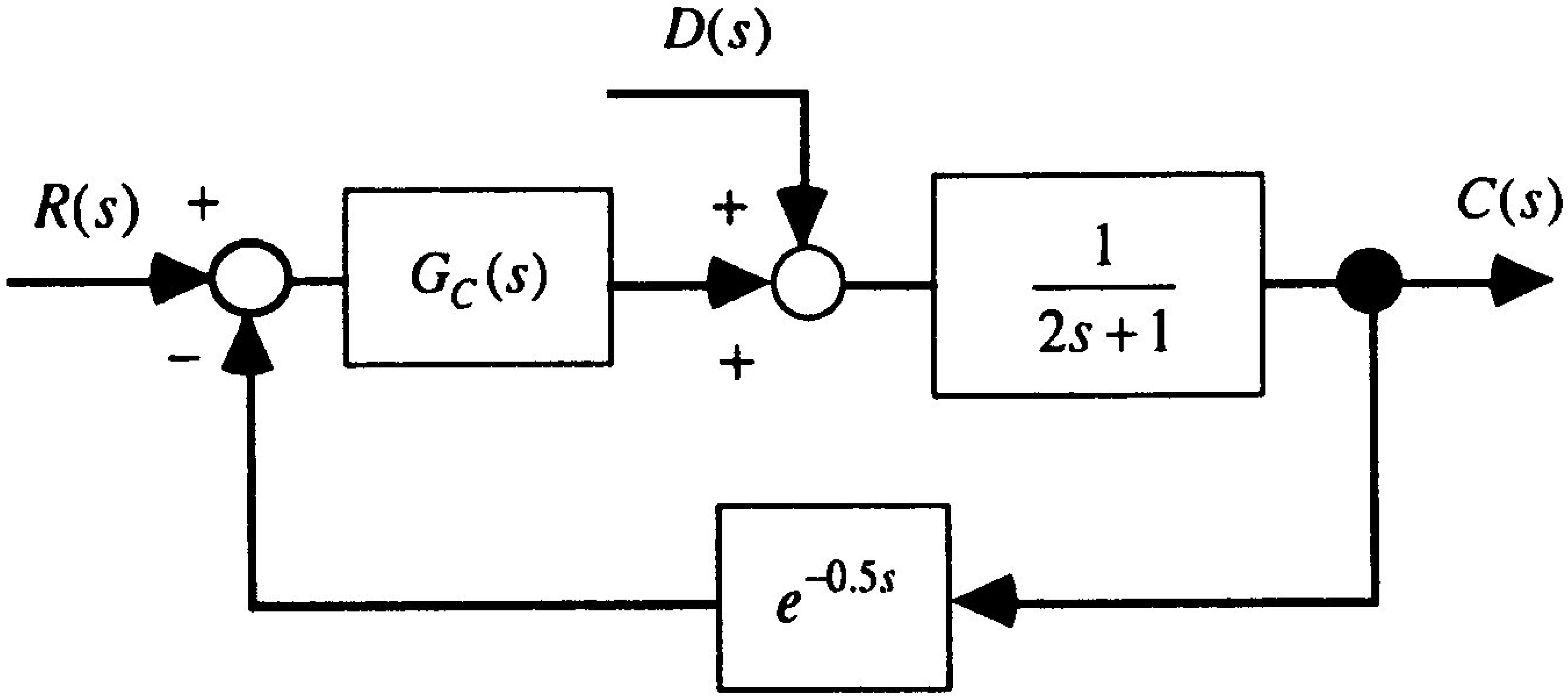


図 11·4　むだ時間要素を含む制御系

まずはじめに，比例制御を行う場合について検討する．制御系の一巡伝達関数は以下のようになる．

$$G_l(s) = K_C \frac{e^{-0.5s}}{2s+1} \tag{11·5}$$

上記の伝達関数の周波数特性を調べると,

$$\text{AR} = \frac{K_C}{\sqrt{(2\omega)^2 + 1}} \tag{11·6}$$

$$\phi = -0.5\omega - \tan^{-1}(2\omega) \tag{11·7}$$

ここで, $\phi = -\pi$ となる周波数すなわち限界周波数を, (11·7)式から求めようとすると解析的には得られない. そこで, 試行錯誤法(*trial and error method*)にて ω_C を求める. その結果, $\omega_C = 3.43$ を得る. この値を(11·6)式に代入し, ARが1となる K_C を求める. その結果, $K_C(= K_U) = 6.93$となる. この値が制御系の安定限界を示す, 限界比例ゲインである.

いま, この制御系においてゲイン余有がGM = 2 (6.02*dB*)となるように比例ゲインを定めるとすると,

$$M = \frac{1}{\text{GM}} = (1/2) = \frac{K_C}{\sqrt{(2\omega_C)^2 + 1}} \tag{11·8}$$

から, $K_C = 3.47(= K_U / 2)$となる.

次に, PI-制御を行う場合について検討する. いま積分時間を $T_I = 1.5$として, 制御系の安定限界を示す比例ゲインの値を求める. この制御系の一巡伝達関数と, その周波数特性を求めると以下のようになる.

$$G_l(s) = K_C\left(1 + \frac{1}{1.5s}\right)\frac{e^{-0.5s}}{2s+1} = K_C\left(\frac{1.5s+1}{1.5s}\right)\frac{e^{-0.5s}}{2s+1} \tag{11·9}$$

$$\mathrm{AR} = \frac{K_C\sqrt{(1.5\omega)^2+1}}{1.5\omega}\frac{1}{\sqrt{(2\omega)^2+1}} \qquad (11\cdot10)$$

$$\phi = \tan^{-1}(1.5\omega) - (\pi/2) - 0.5\omega - \tan^{-1}(2\omega) \qquad (11\cdot11)$$

ここで，$\mathrm{AR}=1, \phi=-\pi$ の二つの条件を上式に代入し，両式を満足する $\omega(=\omega_C)$ および K_C を試行錯誤法にて求めると，これが制御系の安定限界値となる．まず，位相特性の式から限界周波数を求めると $\omega_C = 3.04$ となる．この値をゲイン特性の式に代入して限界ゲインを求めると，$K_U = 6.02$ となる．

いま，位相余有が $60^\circ(=\pi/3\,rad)$ となるような比例ゲインを求めるとすると，$\mathrm{AR}=1$，$\phi=-\pi+(\pi/3)=-(2/3)\pi$ の条件を(11·10)，(11·11)式に代入して，両式が満足するような K_C を求めればよい．試行錯誤法による計算の結果，$K_C = 1.39(\omega_{(1)} = 0.772)$ となる．

P-制御：$K_C = 3.47(\mathrm{GM}=2)$，PI-制御：$K_C = 1.39, T_I = 1.5$ $(\mathrm{PM}=60^\circ=\pi/3\,rad)$ における応答を，デジタルシミュレーション（プログラムリスト：6）により求める．ステップ状の外乱に対する応答を図11·5に示す．

先の§10·4にて述べた，*Ziegler − Nichols* の限界感度法による制御器のパラメータ設定法について，周波数応答法に基づいて考察する．$Z-N$ 法では，制御系を比例制御のみで操作してその安定限界の比例ゲインと持続振動周期を求める．これは，P-制御における一巡伝達関数の周波数特性から，ボードの安定性判定基準によって限界周波数 ω_C を求め，安定限界ゲイン K_U を定めることに対応する．ここで，安定限界における限界周期 P_U は，限界周波数と次式のような関係にある．

$$P_U = \frac{2\pi}{\omega_C} \qquad (11\cdot12)$$

表10·1で示したP-制御の比例ゲイン $K_C = 0.5K_U$ は，制御系のゲイン余有を2に設定したことに相当する．

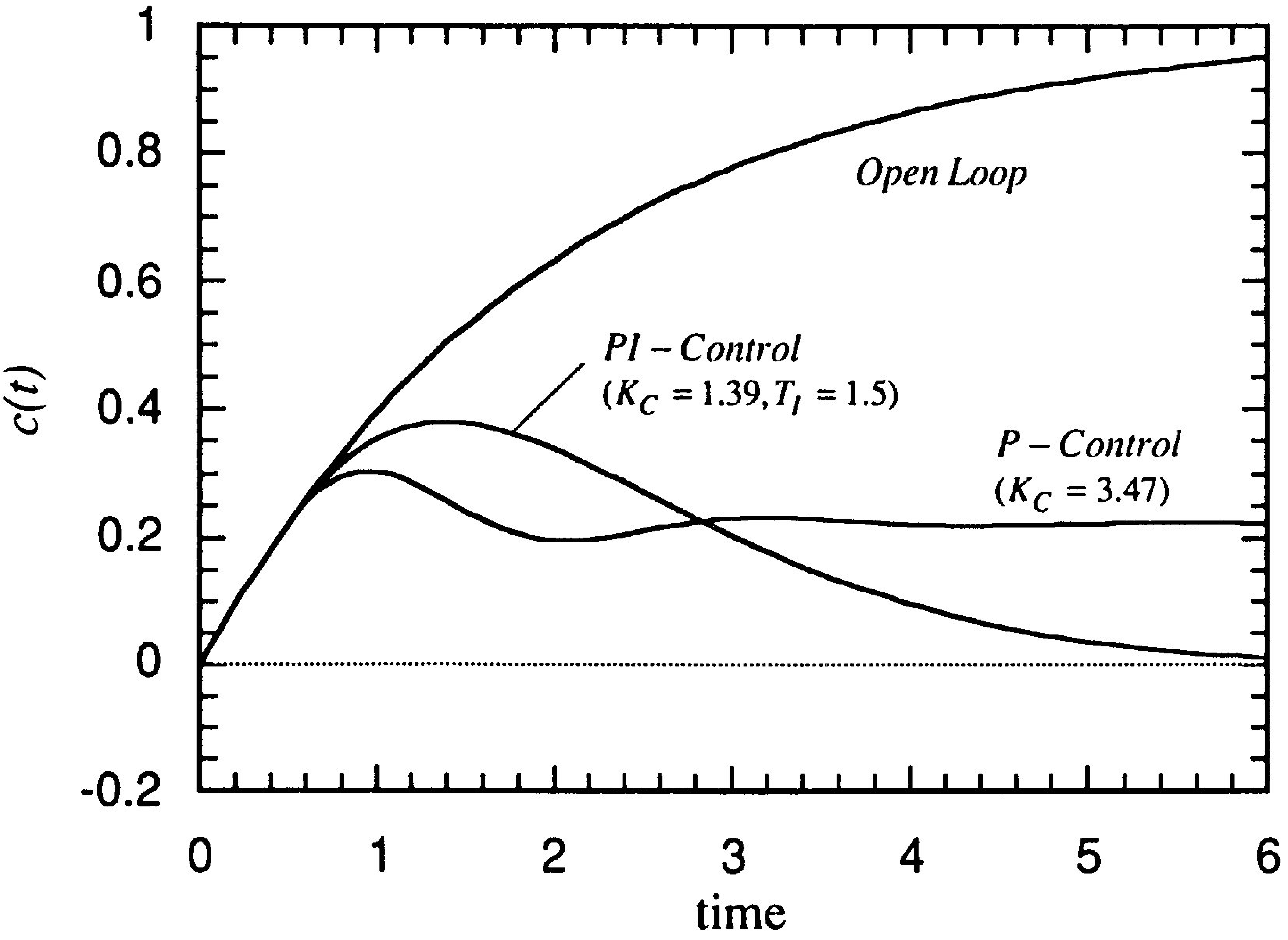


図11·5　むだ時間を含む制御系の外乱に対するステップ応答

周波数応答法によれば，非線型要素であるむだ時間を含む制御系においても，先の例に示したように，比較的容易に安定限界値を求めることができる．ここで得られた K_U, P_U の値を用いて，*Ziegler – Nichols* の限界感度法によって，PID制御器のパラメータを定めることができる．また，このパラメータによって，制御系がどの程度の安定性を持っているかは，ゲイン余有および位相余有を計算すれば評価できる．さらに，この制御系の過渡応答は，デジタルシミュレーションによって求めることができる．

図的に周波数特性を表現する方法の一つに，ベクトル線図がある．これは，先の§5·3にて述べたように，周波数伝達関数の実数部と虚数部が，周波数の変化に対しどのように変化するかを，複素平面（s－平面）上にベクトル軌跡として描いたものである．

フィードバック制御系の一巡伝達関数の周波数特性を，ベクトル線図にて表すと，周波数がゼロのときのベクトルを出発点とし，周波数が無限大になる点でのベクトル（通常は，ゲインがゼロとなるためs－平面の原点となる）を終点とするベクトル軌跡が描かれる．この軌跡が，s－平面の点$(-1, j0)$を通過するものとすれば（このときの周波数がω_Cとなる），この制御系は安定限界にあるといえる．

一巡伝達関数の周波数特性を以下のように表すと，

$$G_l(j\omega) = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega) \tag{11·13}$$

そのゲインおよび位相は，

$$\begin{aligned} |G_l(j\omega)| &= \sqrt{\mathrm{Re}(\omega)^2 + \mathrm{Im}(\omega)^2} \\ \phi &= \tan^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}\right\} \end{aligned} \tag{11·14}$$

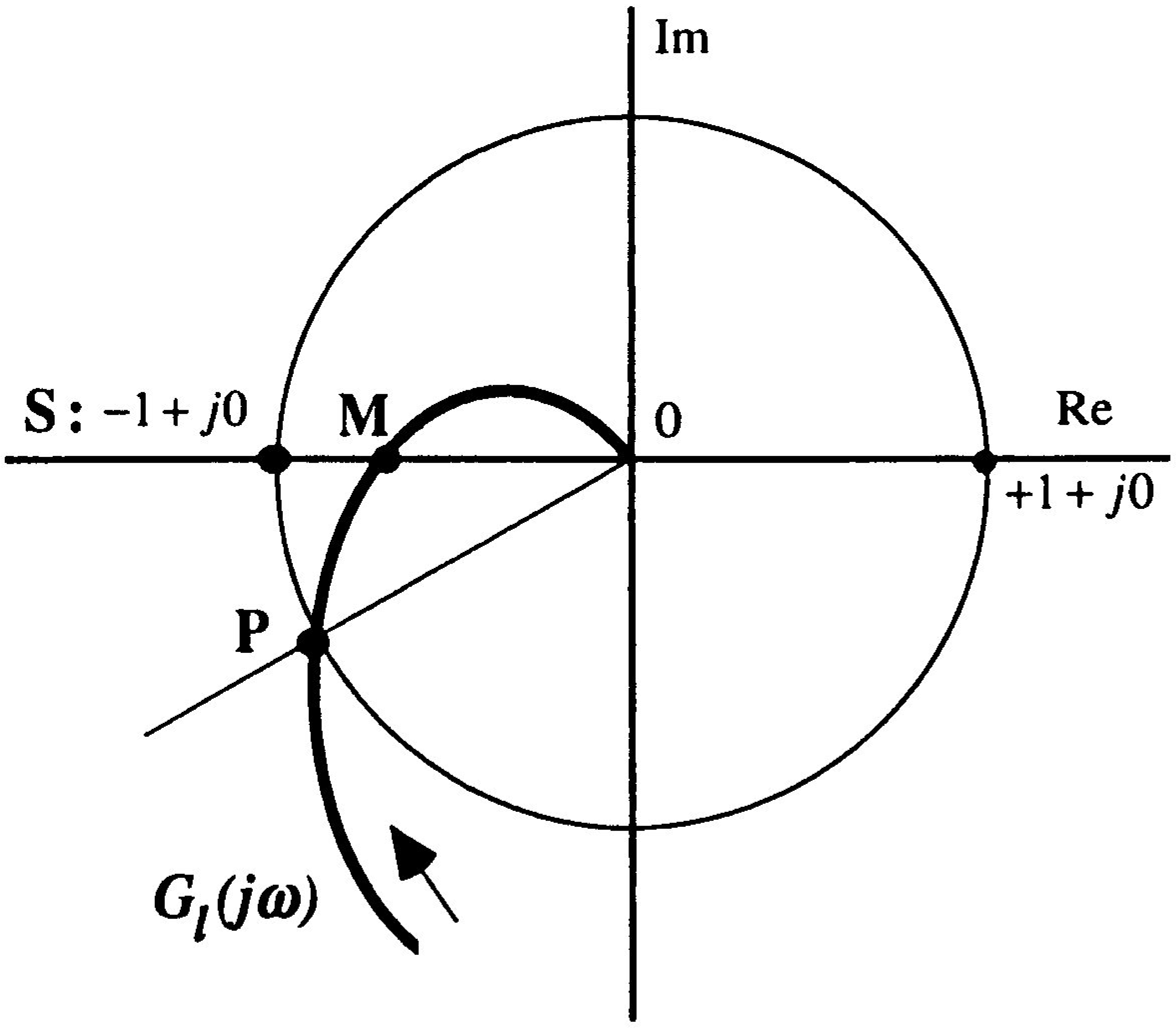
となる．ここで，$\mathrm{Re}(\omega_C) = -1$，$\mathrm{Im}(\omega_C) = 0$とすれば，

$$|G_l(j\omega)| = 1, \quad \phi = \tan^{-1}(-\infty) = -\pi \tag{11·15}$$

これは，ボードの安定性判定基準に基づく安定限界と同じことを表している．そこで，「一巡伝達関数のベクトル軌跡を，ωをゼロから無限大に変化させてs－平面上に描き，ωが増加する方向にベクトル軌跡をたどったとき，点$(-1, j0)$が軌跡の左側にあれば，制御

系は安定となる」．この安定性判定基準を，（簡略化した）ナイキストの判定基準 (*Nyquist stability criterion*) という．

図11·6に，ベクトル線図におけるゲイン余裕 ($\overline{\mathrm{SM}}$) および位相余裕 ($\angle$S0P) を示す．これは，ベクトル軌跡が安定限界点 S : $(-1, 0j)$ からどの程度安定側にあるか，を表している．



$$GM = \overline{\mathrm{SM}} \quad , \quad PM = \angle \mathrm{S0P}$$

図 11·6　制御系の安定性判定のためのベクトル線図

> ナイキストの判定基準：他の表現
> 「一巡伝達関数のベクトル軌跡を，ω を $-\infty$ から $+\infty$ に変化させて描いたとき，その軌跡の内側に点 $(-1, j0)$ を含むと，制御系は不安定となる．」