

## PART I

## プロセスダイナミクス

制御系を設計してその特性を解析するために、まずはじめに行うべきことは、プロセス自身の特性を調べることである。プロセス制御において注目すべき特性は、制御変数が操作量の変化や外乱に対しどのように変化するか、である。この特性をプロセスの動特性\*という。すなわち、あるプロセスに時間の関数である入力 $x(t)$ が入り、それに対応して出力 $y(t)$ が現れるとき、この両変数の関係を動特性(*dynamic characteristics, dynamics*)という。

動特性は、時間領域では微分方程式によって、 $s$ -領域（複素数領域）では伝達関数で、 $\omega$ -領域（周波数領域）では周波数伝達関数で表現される。また動特性は、各種の応答によって直接図的に表示される。例えば、ステップ応答、インパルス応答、ランプ応答などの過渡応答や、正弦波入力に対する定常応答である周波数応答などである。

この *Part I* では、第2章で時間領域での微分方程式による動特性の表現方法について述べる。つづいて第3章では、ラプラス変換による伝達関数について述べる。第4章では、各種の過渡応答について説明し、さらにコンピュータによるデジタルシミュレーションの手法について解説する。第5章では、周波数伝達関数および周波数応答について述べ、この動特性の図的表現法について説明する。第6章では、より一般的な多数入力・出力系を扱う状態空間法に関して、ごく簡単にふれる。

\* 動特性に対し静特性という用語がある。これは、プロセスの各変数が時間的に変化しない定常状態での特性で、連続プロセスにあっては設計方程式となる。

## 2 プロセスの動特性

### 2・1 物質収支・熱収支

化学プロセスの動特性は、そのプロセスにて扱う物質および熱の収支を考えることによって表現できる。動的な特性を考える場合、これらの物質・熱量は時間の関数となるため、非定常状態での収支式を考える。

一般に、物質収支は次のように考えて式を立てる。まず、対象となるプロセスの中に含まれる注目物質(*key component*)の全量 ( $T_M$  [kg] or [mol]) を求める。この量が、時間的に変化するのを、 $dT_M/dt$  のように表す。この変化は、プロセスに単位時間あたり流入する量 ( $F_{M-IN}$  [kg/s]) と流出する量 ( $F_{M-OUT}$  [kg/s]) とに差があるとき生じる。また、プロセスの中で注目物質が生成したり、あるいは消失したりすることによっても起きる。ここで、単位時間あたり生成した量から消失した量を差し引いた量を正味の生成速度 ( $G_M$  [kg/s]) という。そこで、次のような収支式が成り立つ。

$$\frac{dT_M}{dt} = F_{M-IN} - F_{M-OUT} + G_M \quad (2.1)$$

上記の収支式を模式的に表すと、次の図のようになる。

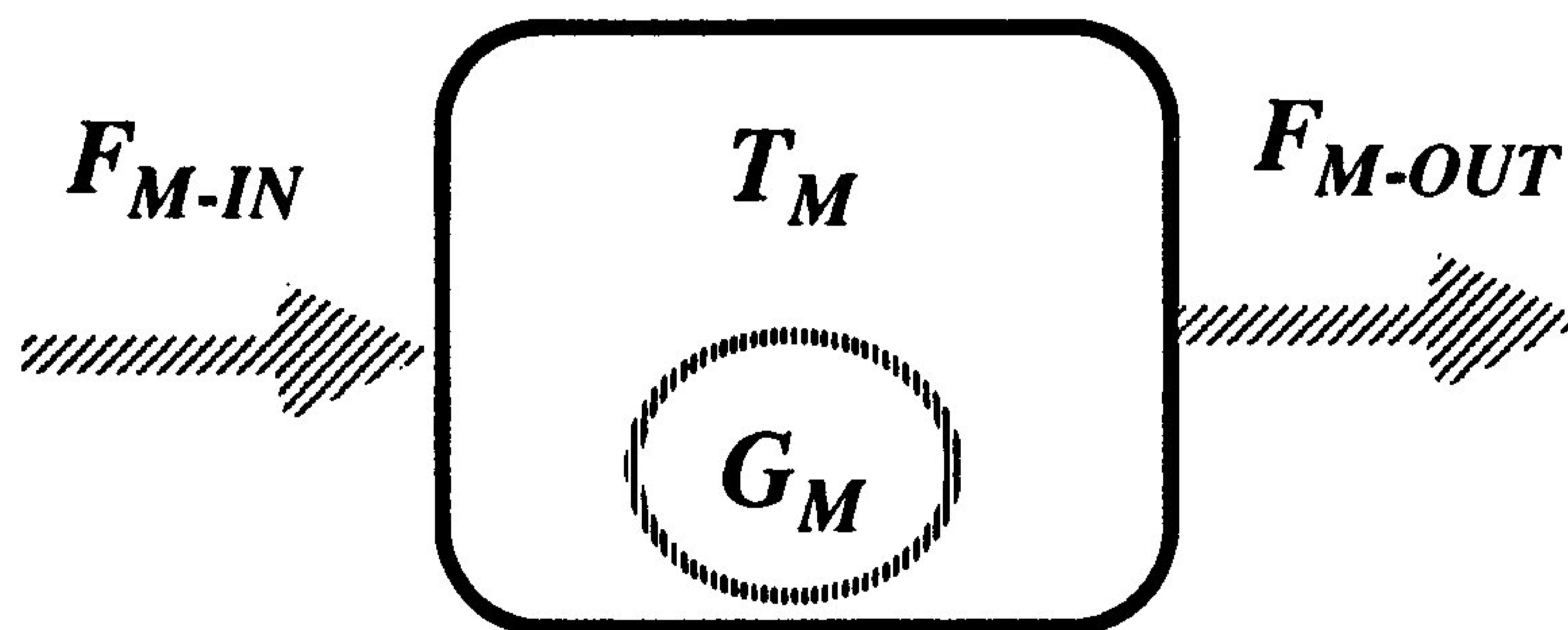


図 2.1 物質収支式の考え方

\* 流束とは、単位時間に単位面積の面（窓）を通過する物理量をいう。この物理量が質量であれば、質量流束 [kg/(m<sup>2</sup>・s)] またはモル流束 [mol/(m<sup>2</sup>・s)] といい、熱量であれば熱流束 [kJ/(m<sup>2</sup>・s)] という。

より厳密に収支式を考えると、次のようになる。任意の空間の中に微小立方体（体積  $\Delta x \Delta y \Delta z$ ）を考える。注目物質 A の濃度を  $C_A(t, x, y, z)$  とする。また、この微小空間の各面に対する A 成分の流束\* (flux) を  $N_A$  とする。この流束は、バルク（A 成分が含まれている流体の本体）の流体移動（流体の速度を  $v$  とする）に伴って移動する流束  $vC_A$  と、濃度勾配によって起こる拡散（拡散係数を  $D_A$  とする）による流束  $J_A$  の和で表される。

$$\begin{aligned} N_A &= vC_A + J_A \\ &= vC_A - D_A \left( \frac{\partial C_A}{\partial x} + \frac{\partial C_A}{\partial y} + \frac{\partial C_A}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2 \cdot 2)$$

さらに、この微小空間での正味の生成速度（生成速度から消出速度を引いたもの）を  $G_A$  とする。微小時間  $\Delta t$  の前後での収支を以下のように考える。

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \Delta z \{ C_A(t + \Delta t) - C_A(t) \} &= \Delta y \Delta z \{ N_A(x) - N_A(x + \Delta x) \} \Delta t \\ &\quad + \Delta z \Delta x \{ N_A(y) - N_A(y + \Delta y) \} \Delta t \\ &\quad + \Delta x \Delta y \{ N_A(z) - N_A(z + \Delta z) \} \Delta t \\ &\quad + \Delta x \Delta y \Delta z G_A \Delta t \end{aligned} \quad (2 \cdot 3)$$

両辺を  $\Delta x \Delta y \Delta z$  および  $\Delta t$  で割って、その極限をとると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_A}{\partial t} &= - \left( \frac{\partial N_A}{\partial x} + \frac{\partial N_A}{\partial y} + \frac{\partial N_A}{\partial z} \right) + G_A \\ &= - \left( \frac{\partial vC_A}{\partial x} + \frac{\partial vC_A}{\partial y} + \frac{\partial vC_A}{\partial z} \right) + D_A \left( \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) \\ &\quad + G_A \\ &= -\nabla(vC_A) + D_A \nabla^2 C_A + G_A \end{aligned} \quad (2 \cdot 4)$$

ここで、 $\nabla$ はナブラ (nabla) ,  $\nabla^2$  はラプラシアン(Laplacian) といい、3次元空間での1回および2回の微分操作を表す記号である。

(2・4)式が、物質収支の一般式である。この式を適当な境界条件、初期条件のもとで解くと局所濃度の時間的变化、 $C_A(t,x,y,z)$  が求まり、装置内の濃度分布が決定できる。

槽型化学反応器を例にとり、物質収支式の立てかたについて説明する。反応器の概略を図2・2に示す。

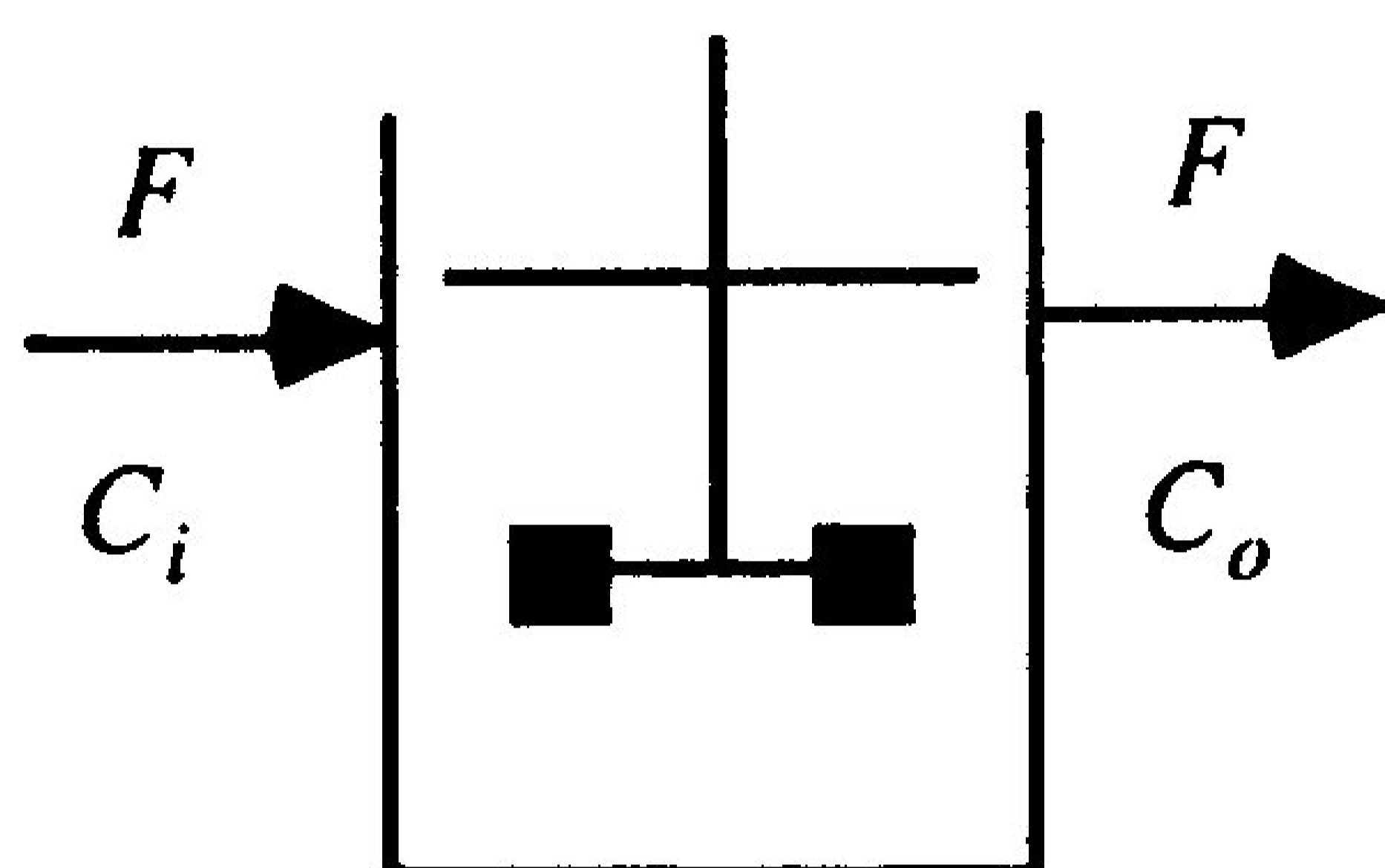


図 2・2 槽型化学反応器

ここで使用する変数を以下のように定める。

反応溶液流量	: $F$ [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
入口原料濃度	: $C_i$ [ $\text{mol} / \text{m}^3$ ]
槽内・出口原料濃度	: $C_o$ [ $\text{mol} / \text{m}^3$ ]
反応器体積	: $V$ [ $\text{m}^3$ ]
反応速度 (1次反応)	: $r = kC_o$ [ $\text{mol} / (\text{m}^3\text{s})$ ]
反応速度定数	: $k$ [ $1 / \text{s}$ ]
時間	: $t$ [ $\text{s}$ ]

図2・2の反応器内は十分攪拌されているため、槽内の濃度はどこをとっても同じであると考えられる。このような混合状態を完全混合 (*perfect mixing*) という。したがって、槽内の原料濃度と出口流体の濃度は等しくなる。(2・1)式を適用して物質収支式を考える。槽内にある原料の全量は、

$$T_M = VC_o$$

流入量，流出量は，

$$F_{M-IN} = FC_i$$

$$F_{M-OUT} = FC_o$$

原料は，反応によって生成することはないが，反応が進行すると消費されるので，正味の生成速度はマイナスとなる。

$$G_M = -Vr = -VkC_o$$

したがって，このプロセスの物質収支式は，

$$\frac{d(VC_o)}{dt} = FC_i - FC_o - VkC_o \quad (2.5)$$

となる。反応器体積は一定値であるから微分の外に出して，式を変形すると，

$$\tau \frac{dC_o}{dt} = C_i - C_o - (\tau k)C_o \quad (2.6)$$

となる。ここで， $\tau = V / F$  [s]は平均滞留時間 (*mean residence time*)と呼ばれ，反応槽に入った流体が槽内に留まっている時間の平均値を表す。ここで，いずれの式も，左辺と右辺の次元および右辺の各項の次元は，全て等しいことに注意。

自然科学の現象を数式で表現することを，数式モデル (*mathematical model*) を立てるという。この場合，式中の各項はある物理的意味 (*physical meaning*) を持つことが多く，その次元を調べると意味を理解するのに役立つ。さらに，各項の次元が等しくなければ，加算・減算および等号で結びつけることができない。物理量を表す変数には，示量変数 (*extensive variable*) と示強変数 (*intensive variable*) の二種類がある。示量変数は，量的変数で数式の中で加算・減算ができる。示強変数は，強さの程度を表す変数で，この変数のみで加算・減算はできない。例えば，濃度  $C$  [kg / m<sup>3</sup>]，温度  $T$  [K] は示強変数であり，濃度  $C_1$  と  $C_2$  を直接加算・減算できない。質量  $M$  [kg]，熱量  $Q$  [kJ] は示量変数であるから加算・減

算ができる。したがって、物質収支式の各項は全て示量的変数でなければならない。(2・6)式の右辺では濃度の引き算を行っているが、これは基礎収支式(2・5)式を変形したために現れたものである。

一般に、熱収支は(2・1)式中の各項を次のように変えると求まる。すなわち、プロセス中の全熱量を $T_H$  [kJ]，流入熱量を $F_{H-IN}$  [kJ/s]，流出熱量を $F_{H-OUT}$  [kJ/s]，正味の熱生成速度を $G_H$  [kJ/s]とすると、熱収支式は次のようになる。

$$\frac{dT_H}{dt} = F_{H-IN} - F_{H-OUT} + G_H \quad (2\cdot7)$$

例として、加熱タンク系を取り上げ、熱収支式について考える。系の概略を図2・3に示す。

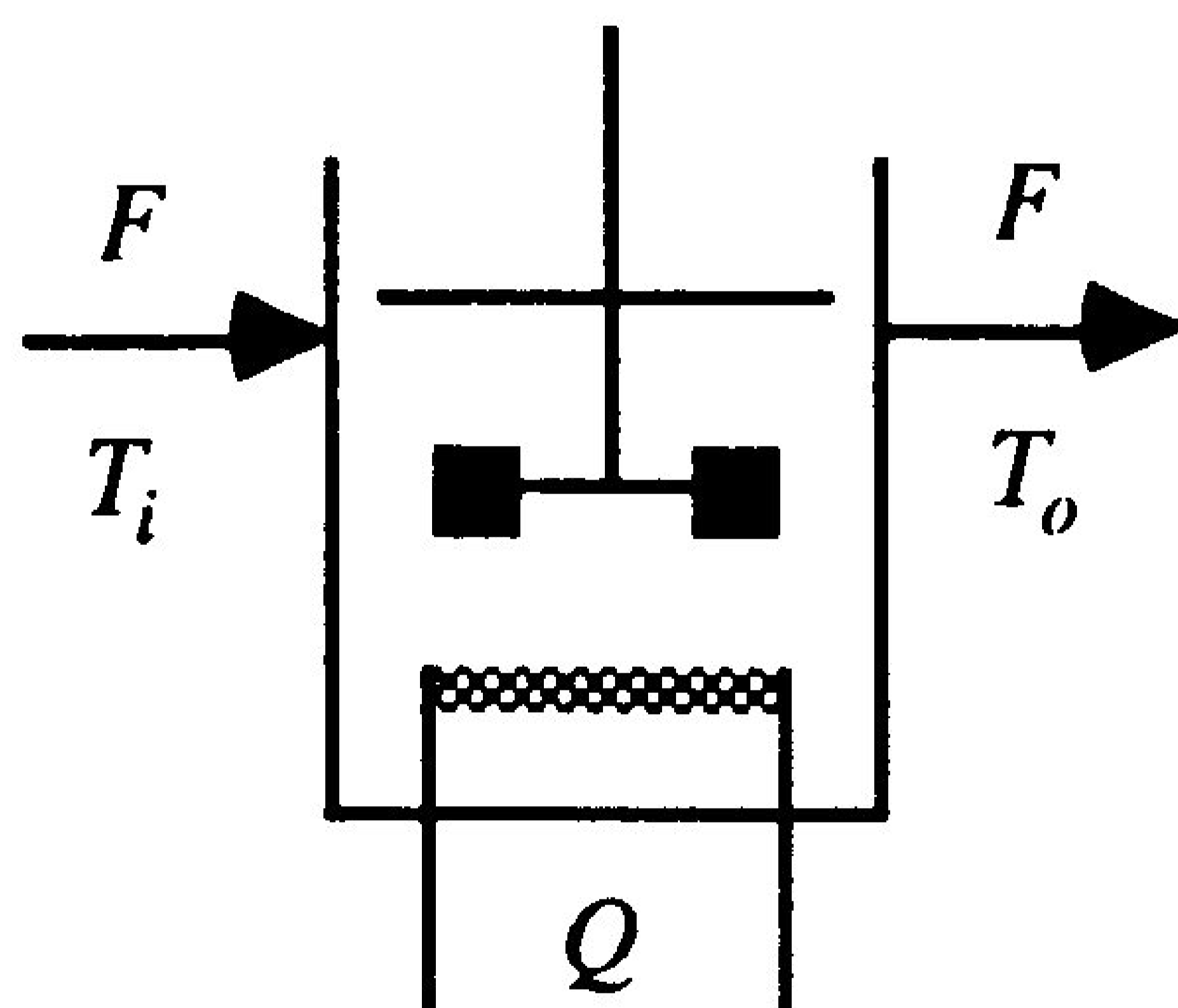


図 2・3 加熱タンク系

ここで使用する変数を以下のように定める。

入口流体温度	: $T_i$ [K]
出口流体温度	: $T_o$ [K]
ヒータ供給熱量	: $Q$ [kJ/s]
流体流量	: $F$ [m <sup>3</sup> /s]
流体密度	: $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
流体比熱	: $C_p$ [kJ/(kg K)]
タンク体積	: $V$ [m <sup>3</sup> ]
時間	: $t$ [s]

図2・3のタンクを完全混合槽とすると，槽内の流体温度は出口流体温度と等しくなる．したがって，槽内の全熱量は次のようになる．

$$T_H = V\rho C_p T_o$$

流入，流出熱量は，

$$F_{H-IN} = F\rho C_p T_i$$

$$F_{H-OUT} = F\rho C_p T_o$$

また，槽内で生成する熱はヒータから供給される熱のみで，消失する熱は無い．そこで，正味の熱生成速度は，

$$G_H = Q$$

したがって，この系の熱収支式は，

$$\frac{d(V\rho C_p T_o)}{dt} = F\rho C_p T_i - F\rho C_p T_o + Q \quad (2\cdot8)$$

となる．定数  $V, \rho, C_p$  を微分の外に出してから式を変形する．

$$\tau \frac{dT_o}{dt} = T_i - T_o + \left( \frac{1}{F\rho C_p} \right) Q = T_i - T_o + KQ \quad (2\cdot9)$$

ここで， $K = 1/(F\rho C_p)$  である．

(2・6)式と(2・9)式を比べると，類似性がよくわかる．右辺の第3項は，(2・6)式では反応によって消失するモル数を濃度に換算し，(2・9)式ではヒータから供給される熱を温度に換算したものである．