2・2　分布定数系のプロセス動特性

前節で取り上げたプロセスでは，使用したパラメータは定数で，変数は時間の関数であった．そしてこの変数（濃度，温度）は，対象となるプロセス中でその場所・位置によらない変数として扱ってきた．このような取り扱ができるプロセスを**集中定数系** (*lumped parameter system*) と呼ぶ．そして，このプロセスの動特性は常微分方程式で表現される．

これに対し，変数の値がプロセスの位置・場所によって異なる系を**分布定数系** (*distributed parameter system*) という．化学プロセスには多くの分布定数系プロセスがあり，その動特性は偏微分方程式で表される．

管型反応器を例に取り，この分布定数系における物質収支式の立てかたについて説明する．反応器の概略を図2･4に示す．

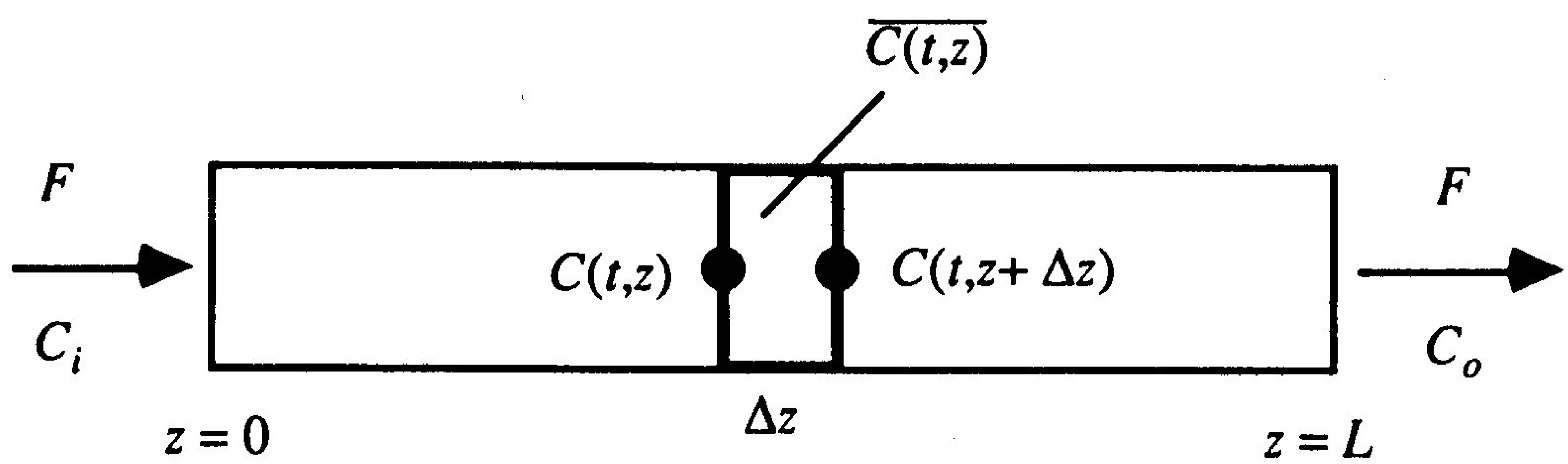

図 2･4　管型反応器

ここで使用するパラメータを以下のように定める．

原料供給流量	：F [m^3/s]
入口原料濃度	：C_i [mol / m^3]
出口原料濃度	：C_o [mol / m^3]
反応器内濃度	：$C(t,z)$ [mol / m^3]
反応器長さ	：L [m]
反応器断面積	：A [m^2]

反応器内の位置	：z [m]
反応速度（1次反応）	：$r = k\,C(t,z)$ [mol / (m^{3}s)]
反応速度定数	：k [1 / s]
原料流体の流速	：$v = (F/A)$ [m / s]
時間	：t [s]

反応器の中には触媒が充填されており，原料流体が管内を通過するにつれ反応が進行し，反応器出口にて最大の転化率を示すものとする．したがって原料濃度は時間と反応器内の位置の関数となる．いま，流体の流れは押し出し流れ(*plug flow*)*であると仮定する．反応器内のある位置で微小体積 $\Delta V = \Delta zA$ を考える．そして，この体積内での平均濃度を $\overline{C(t,z)}$ で表す．この微小体積へ出入りする原料の物質収支を考える．

$T_M = \Delta V\overline{C(t,z)} = \Delta zA\overline{C(t,z)}$

$F_{M\text{-}IN} = FC(t,z)$

$F_{M\text{-}OUT} = FC(t,z+\Delta z)$

$G_M = -\Delta Vr = -\Delta zAk\overline{C(t,z)}$

(2・1)式に上記の変数を代入し，次式を得る．

$$\frac{\partial\left\{\Delta zA\overline{C(t,z)}\right\}}{\partial t} = FC(t,z) - FC(t,z+\Delta z) - \Delta zAk\overline{C(t,z)} \tag{2・10}$$

ΔzAを左辺の微分項から出して式を整理すると，

$$\frac{\partial\overline{C(t,z)}}{\partial t} = -v\frac{\{C(t,z+\Delta z) - C(t,z)\}}{\Delta z} - k\overline{C(t,z)}$$

Δzをゼロとする極限をとると，$\overline{C(t,z)} \rightarrow C(t,z)$となり，

$$\frac{\partial C(t,z)}{\partial t} = -v\frac{\partial C(t,z)}{\partial z} - kC(t,z) \tag{2・11}$$

となる．

＊ ピストン流れ(piston flow)，栓流(plug flow)ともいわれ，ある領域に流入した流体部分が，他の流体部分と混合することなく，一体となって流れる状態をいう．円管内では，どの流体部分の速度も全て等しく，あたかもピストンが移動しているような流れの状態をいう．これと対照的な流れの状態が完全混合流れである．

(2･11)式を解くためには,

$$t=0: \quad C(0,z)$$

$$z=0: \quad C(t,0)=C_i$$

の二つの条件が必要となる．前者を初期条件，後者を境界条件という．この条件下で得られた濃度$C(t,z)$ は，反応器内の位置と時間によって変化する局所濃度であり，$z=L$での濃度が出口流体濃度$C(t,L)=C_o(t)$ となる．

次に，管型熱交換器(*pipe and shell type heat exchanger*) を例にとり，熱収支式について考える．プロセスの概要を図2･5に示す．

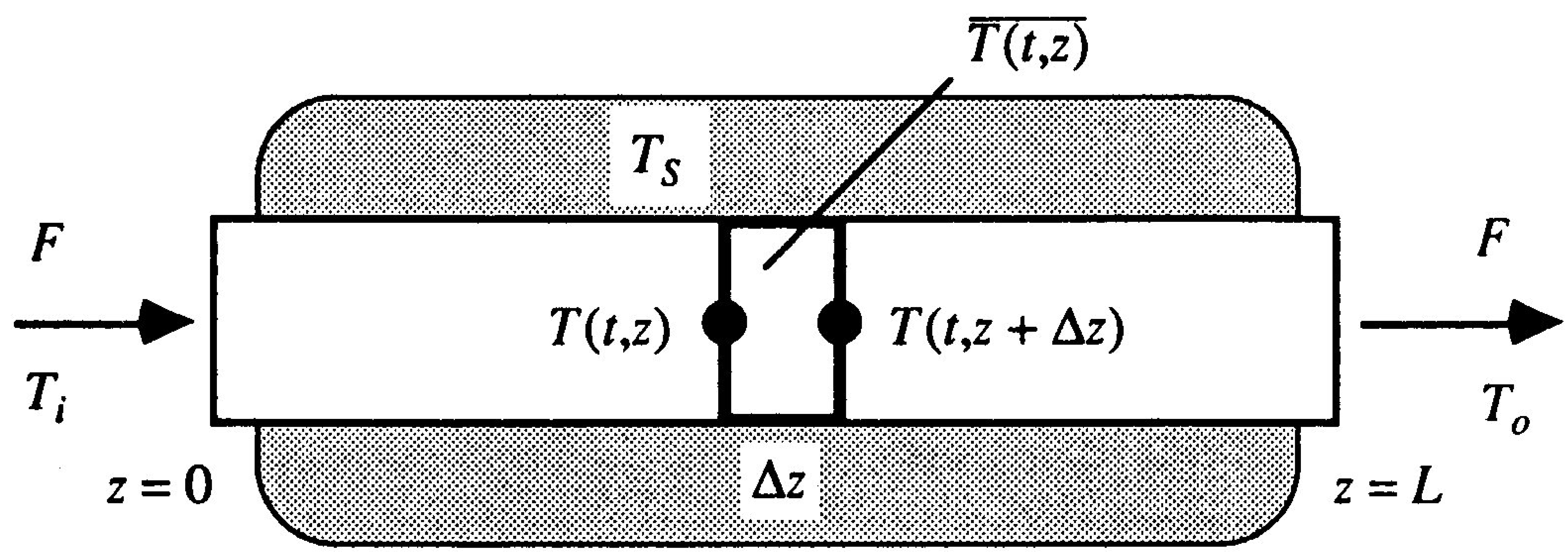

図 2･5　管型熱交換機

ここで，使用するパラメータを以下のように定める．

入口流体温度	: T_i [K]
出口流体温度	: T_o [K]
シェル内温度	: T_S [K]
流体流量	: F [m^3 / s]
流体密度	: ρ [kg / m^3]
流体比熱	: C_P [kJ / (kg K)]
総括伝熱係数	: U [kJ / (m^2 K s)]
管断面積	: A [m^2]
管周長さ	: P [m]

管長さ	：L [m]
管内の位置	：z [m]
時間	：t [s]

管内の微小体積$\Delta V = \Delta z A$内での熱収支を考える．この区間での平均温度を $\overline{T(t,z)}$ とする．微小区間での全熱量，流入熱量，流出熱量，生成熱量を考える．

$$T_H = \Delta z A \rho C_P \overline{T(t,z)}$$

$$F_{H\text{-}IN} = F\rho C_P T(t,z) + U\Delta z P(T_S - \overline{T(t,z)})$$

$$F_{H\text{-}OUT} = F\rho C_P T(t,z+\Delta z)$$

$$G_H = 0$$

ここで流入熱量は，主流体の流れによって流入する量と，管の微小伝熱面$\Delta z P$を通してスチームから流入する量の和となる．上記の変数を(2･7)式に代入すると，

$$\frac{\partial\left\{\Delta z A\rho C_p \overline{T(t,z)}\right\}}{\partial t} = F\rho C_p T(t,z) + U\Delta z P\left\{T_s - \overline{T(t,z)}\right\} - F\rho C_p T(t,z+\Delta z) \tag{2・12}$$

上式を変形して，Δzをゼロとする極限をとると，

$$\frac{\partial T(t,z)}{\partial t} = -v\frac{\partial T(t,z)}{\partial z} + \left(\frac{UP}{\rho C_p A}\right)\left\{T_s - T(t,z)\right\} \tag{2・13}$$

となる．

初期条件および境界条件が与えられると，この式から温度分布$T(t,z)$が求まり，出口流体の温度も計算できる．

2・3 非線型プロセスの線型近似

プロセスの数式モデルは，線型と非線型とに分類することができる．

線型プロセス(*linear process*)とは次のようなプロセスをいう．いま，このプロセスの入力を$x(t)$，出力を$y(t)$とし，その関係が一般的に次の式で与えられたとする．

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots\right)=0$$

線型プロセスでは，この関数が $x, y, (dy/dt), (d^2y/dt^2), \cdots$ の1次結合で表される．

いま，線型プロセスに入力x_1が入り，その応答をy_1とする．また，入力x_2に対する出力をy_2とする．ここで，入力$c_1x_1+c_2x_2$に対する応答を求めると，線型プロセスでは$c_1y_1+c_2y_2$で与えられる．c_1, c_2は任意の定数．このような関係は，**重ね合わせの原理**(*principle of superposition*)が成り立つといわれる．したがって，線型プロセスでは，典型的な入力（ステップ入力，インパルス入力）に対する応答を一つ求めておけば，この応答の線型結合の形で，任意の入力に対する応答が求まる．

非線型プロセス(*nonlinear process*)では重ね合せの原理は成り立たず，ある一つの入力に対する応答を求めても，他の入力に対する応答を予想することは難しい．また，このプロセスの特性をあらわす非線型の微分方程式は，その解析解が必ずしも得られるとは限らない．そこで，このように取り扱いがやっかいな非線型プロセスを**線型近似**(*linearization*)することを試みる．

タンク液位系の例題を示して，線型近似の方法について説明する．図2·6に示すタンク液位系について考える．このプロセスで，流入

液流量とタンクの液位との関係を調べる．

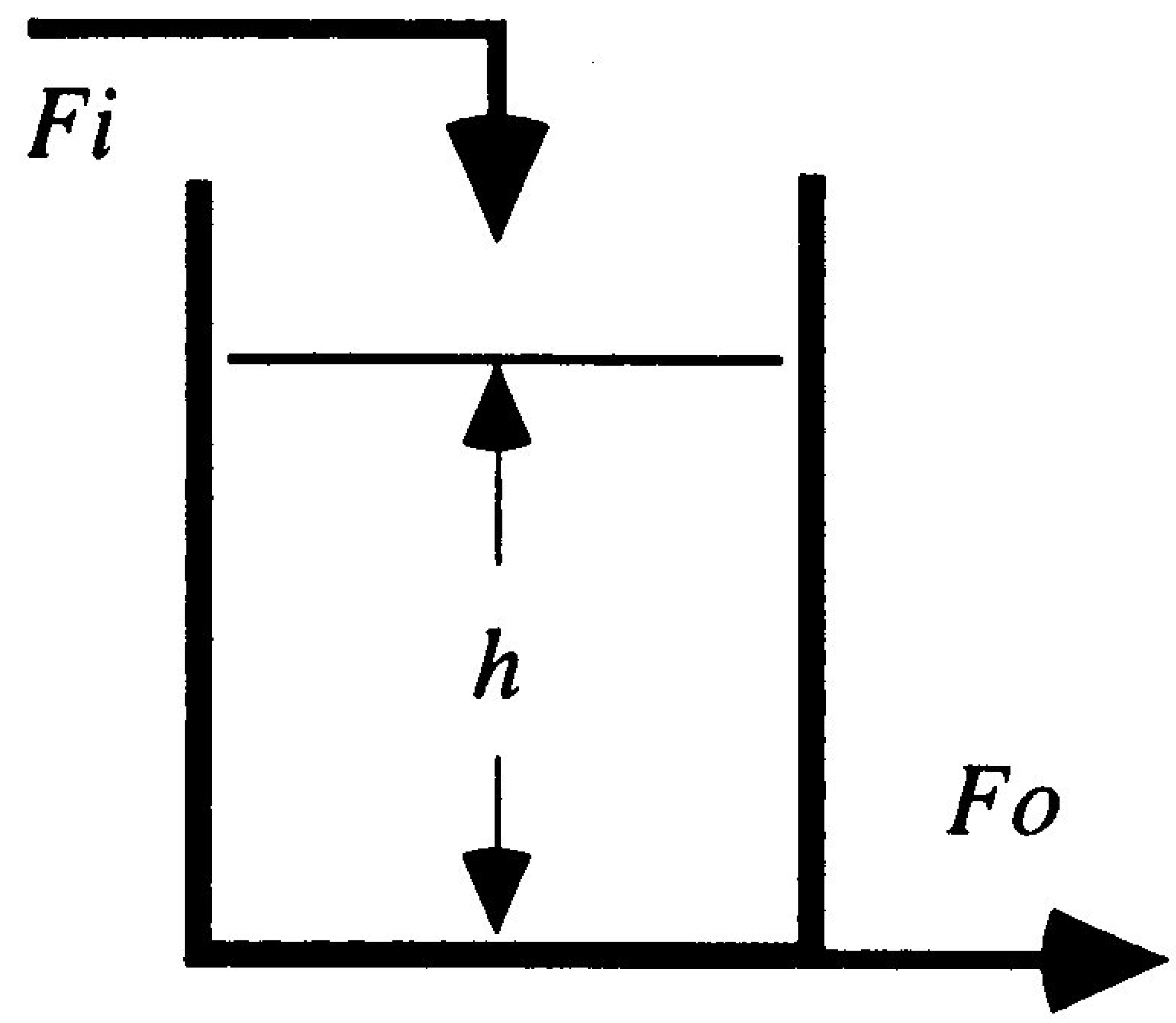

図 2·6　タンク液位系

ここで使用するパラメータを以下のように定める．

流入液流量	：F_i	[m^3/s]
流出液流量	：F_o	[m^3/s]
液位	：h	[m]
タンク断面積	：A	[m^2]
液体の密度	：ρ	[kg/m^3]

(2·1)式に基づいて物質収支を考えると，$T_M = Ah\rho$, $F_{M-IN} = F_i\rho$, $F_{M-OUT} = F_o\rho$ であるから，収支式は次のようになる．

$$\frac{d(Ah\rho)}{dt} = F_i\rho - F_o\rho \tag{2·14}$$

ここで，A, ρ は定数であるから，

$$A\frac{dh}{dt} = F_i - F_o \tag{2·15}$$

タンクから流出する液量は，液位と次のような関係にある．

$$F_o = c\sqrt{h} \tag{2・16}$$

ここで，cは定数である．このF_oとhとの関係は非線型である．そこで，次のような手順で線型近似を行う．

いま，非線型の関数，$y=f(x)$ を考える．プロセスが定常状態となっているとき，すなわち，各変数が時間によって変化しない状態のとき，$y=y_s$，$x=x_s$とすると，$y_s=f(x_s)$が成り立つ．いま，各変数を次のように，定常値とそこからの変化分（偏差変数）との和として表すことにする．

$$y(t)=y_s+\Delta y(t)$$
$$x(t)=x_s+\Delta x(t)$$

この変数をもとの関数に代入し，定常値のまわりでテーラー展開する．

$$\begin{aligned} y_s+\Delta y &= f(x_s+\Delta x) \\ &= f(x_s)+\left(\frac{df}{dx}\right)_{xs}\Delta x+\left(\frac{1}{2!}\right)\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{xs}\Delta x^2+\cdots\cdot \end{aligned}$$

上式右辺の第3項以下には，偏差変数の2乗，3乗･･･の項が含まれているが，これを高次の微小項として切り捨てる．また，定常状態での関係式$y_s=f(x_s)$から，上式は次のように近似できる．

$$\Delta y \approx \left(\frac{df}{dx}\right)_{xs}\Delta x \tag{2・17}$$

タンク液位プロセスの定常状態を考えると，次の関係が成り立つ．

$$F_{i,s}=F_{o,s}$$
$$F_{o,s}=c\sqrt{h_s}$$

変数を次のように表すとすれば，

$$\left.\begin{aligned} F_i(t) &= F_{i,s} + \Delta F_i(t) \\ F_o(t) &= F_{o,s} + \Delta F_o(t) \\ h(t) &= h_s + \Delta h(t) \end{aligned}\right\} \tag{2·18}$$

(2·16)式は次のように線型近似できる．

$$\Delta F_o = \left(\frac{dF_o}{dh}\right)_{hs} \Delta h = \left(\frac{c}{2\sqrt{h_s}}\right)\Delta h = \left(\frac{1}{R}\right)\Delta h \tag{2·19}$$

ここで，Rは流出抵抗と呼ばれる．

$$R = \frac{2\sqrt{h_s}}{c} = \frac{2h_s}{F_{o,s}} \qquad [\mathrm{s/m^2}] \tag{2·20}$$

いま，(2·15)式に(2·18)式を代入すると，

$$A\frac{d\Delta h}{dt} = F_{i,s} + \Delta F_i - (F_{o,s} + \Delta F_o) = \Delta F_i - \Delta F_o$$

(2·19)式の関係から，次のような偏差変数の線型微分方程式となる．

$$A\frac{d\Delta h}{dt} = \Delta F_i - \left(\frac{1}{R}\right)\Delta h \tag{2·21}$$

非線型の関係が2変数の積で与えられる $y = x_1 \cdot x_2$ の場合には，次のようにして線型化する．

$$\begin{aligned} y &= y_s + \Delta y \\ &= (x_{1,s} + \Delta x_1)(x_{2,s} + \Delta x_2) \approx x_{1,s} \cdot x_{2,s} + x_{1,s}\Delta x_2 + x_{2,s}\Delta x_1 \end{aligned}$$

$$\Delta y \approx x_{1,s}\Delta x_2 + x_{2,s}\Delta x_1 \tag{2·22}$$