3　ラプラス変換と伝達関数

プロセスの動特性は，先の第 2 章で述べたように，微分方程式であたえられる．この方程式を直接解いて，ある入力に対する応答を求め，制御系を解析する方法もある．しかし，この微分方程式をラプラス変換して伝達関数の形で，プロセスの動特性を表現することが広く行われている．ラプラス変換された微分方程式は代数方程式となる．そのため，この式から応答を求める方法は，微分方程式を積分してその解を求める方法に比べ，より容易になる．また，入力・出力間の関係が入り組んだ複雑なプロセスや，制御系の応答を求めるには，伝達関数による表示方法が有力となる．

上記の関係を模式的に表わすと，図3·1のようになる．

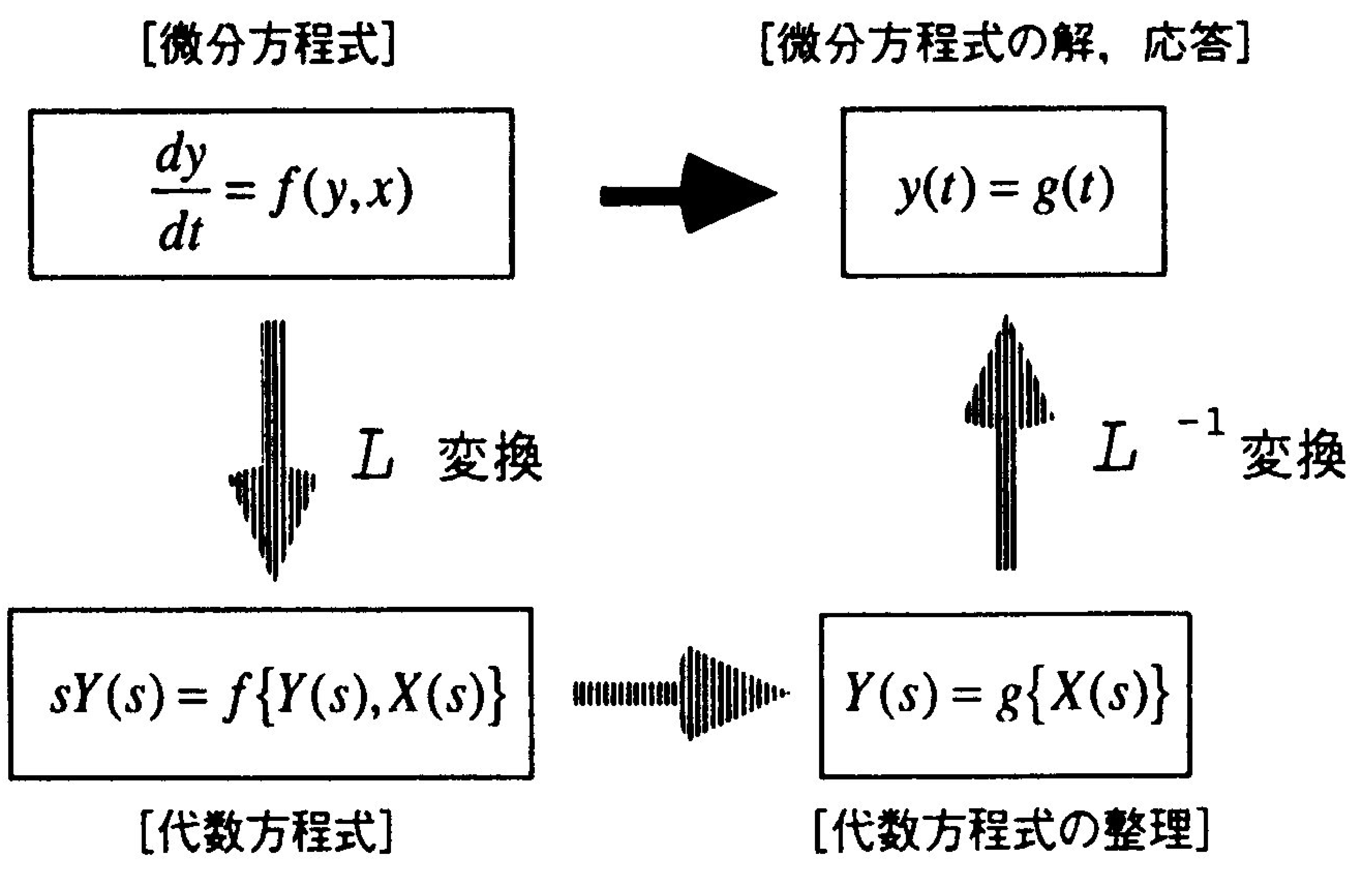

図 3·1　　微分方程式とラプラス変換との関係

3・1 ラプラス変換

ラプラス変換(*Laplace transformation*) は，以下に示す定義式からわかるように，時間の関数 $f(t)$ を複素数 s の関数 $F(s)$ に積分変換したものである．

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt \tag{3·1}$$

本書では，上記の変換を次のように記述する．

$$F(s) = L\{f(t)\}$$

(3·1)式の積分は定積分で，時間が 0 から無限大までの領域を積分する．その結果，時間の変数はなくなり，パラメータ s だけが残る．このパラメータは複素数であり，したがって変換後の関数は複素数 s のみの関数となる．ラプラス変換は，正の時間領域（ゼロを含む）での積分変換であるため，$f(t)$ もまた正の時間領域で定義されていればよい．一般に，制御で扱う関数 $f(t)$ は，$t<0$ でゼロとする．すなわち，$t=0$ における初期条件は $f(t)=0$ とする．

制御工学にて使用する大部分の関数は，すでにそのラプラス変換された形が求められている．したがって，これを利用して制御系の設計・解析を行う．ラプラス変換された代表的な関数の一覧表を以下に示す．

表 3·1 ラプラス変換表

Time function $(t \geq 0)$	Laplace transform
Unit impulse * : $\delta(t)$	1
Unit step ** : $u(t)=1$	$\dfrac{1}{s}$

* インパルス関数は次のように定義されている．

$\delta(t)=0 : \quad t \neq 0$

$\delta(t) \to \infty : \quad t=0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1$

** ステップ（階段）関数は次のように定義されている．

$u(t)=1: \quad 0 \le t$

$u(t)=0: \quad t<0$

Time function $(t \ge 0)$	Laplace transform
Ramp: $f(t)=t$	$\dfrac{1}{s^2}$
t^2	$\dfrac{2!}{s^3}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$

ラプラス変換は，線型作用素といわれており，次のような性質がある．いま，$f_1(t)$のラプラス変換を$F_1(s)$，$f_2(t)$の変換を$F_2(s)$と

して，$y=c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)$のラプラス変換を考えると，

$$L\{y\}=L\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\}=c_1 L\{f_1(t)\}+c_2 L\{f_2(t)\}$$

$$=c_1 F_1(s)+c_2 F_2(s) \tag{3·2}$$

ここで，c_1, c_2 は定数である．

関数$f(t)$を時間について微分・積分したものをラプラス変換すると，次のようになる．

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=sF(s)-f(0) \tag{3·3}$$

$$L\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\}=s^2 F(s)-sf(0)-f'(0) \tag{3·4}$$

ここで，$f(0), f'(0)$ は関数$f(t)$および$df(t)/dt$ の初期値（$t=0$ におけるそれぞれの値）である．

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=\frac{1}{s}F(s) \tag{3·5}$$

関数$f(t)$が最終的にどのような値に落ち着くか，すなわち，$t\to\infty$における関数の最終値 f_v は，制御問題では重要となる．この最終値はラプラス変換された$F(s)$ の関数から直接求めることができる．［**最終値の定理**(*final − value theorem*)］

$$f_v=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0}\{sF(s)\} \tag{3·6}$$

関数$f(t)$の時間軸を θ だけ移動した関数 $f(t-\theta)$を考える．このような関数関係を示すプロセスは，**移動時間おくれ要素**(*transportation lag*) あるいは**むだ時間要素** (*dead time element*) と

呼ばれ，プロセス制御においてよく現れる．この関数をラプラス変換すると，次のようになる．

$$\mathcal{L}\{f(t-\theta)\} = e^{-\theta s}F(s) \tag{3·7}$$

3・2　ラプラス逆変換

ラプラス逆変換 (*inverse Laplace transformation*) は，以下のように定義されている．

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st} ds \tag{3·8}$$

本書では，この逆変換操作を次のように記述する．

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

微分方程式をラプラス変換し，得られた代数方程式から出力を求めると，一般には，次式のような s の多項式となる．

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \end{aligned} \tag{3.9}$$

この $F(s)$ の逆変換を得るために，(3·8)式の積分変換を行うことは通常はしない．先に示したラプラス変換表の関数関係を利用して，次のような方法でラプラス逆変換を行う．まず，(3.9)式の分母の方程式 $D(s) = 0$ の n ケの根を求めて因数分解する．そして，次式のように部分分数に展開する．

$$F(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+b_2s^{m-2}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\cdots(s+\lambda_{n-1})(s+\lambda_n)}$$
$$=\frac{c_1}{(s+\lambda_1)}+\frac{c_2}{(s+\lambda_2)}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{(s+\lambda_{n-1})}+\frac{c_n}{(s+\lambda_n)} \tag{3·10}$$

ここで，$c_1,c_2,\cdots c_{n-1},c_n$ は定数で，未定係数法などによって決定する．表3·1のラプラス変換表から，(3·10)式は次のように逆変換される．

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$
$$=c_1e^{-\lambda_1t}+c_2e^{-\lambda_2t}+\cdots+c_{n-1}e^{-\lambda_{n-1}t}+c_ne^{-\lambda_nt} \tag{3·11}$$

(3·10)式の係数を決定する方法に，ヘヴィーサイドの展開法(*Heaviside expansion method*)がある．以下に，数値例を示して説明する．

$$\frac{1}{s(2s+1)(3s+1)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{2s+1}+\frac{c_3}{3s+1}$$

まず，両辺に s を掛ける．

$$\frac{\cancel{s}}{\cancel{s}(2s+1)(3s+1)}=\frac{c_1\cancel{s}}{\cancel{s}}+\frac{c_2s}{2s+1}+\frac{c_3s}{3s+1}$$

次に，両辺の s にゼロを代入すると，$1=c_1$ を得る．

元の展開式の両辺に $(2s+1)$ を掛ける．

$$\frac{\cancel{(2s+1)}}{s\cancel{(2s+1)}(3s+1)}=\frac{c_1(2s+1)}{s}+\frac{c_2\cancel{(2s+1)}}{\cancel{2s+1}}+\frac{c_3(2s+1)}{3s+1}$$

上式の両辺の s に，$2s+1=0$ から得た $s=-(1/2)$ を代入すると，$4=c_2$ を得る．

元の展開式の両辺に $(3s+1)$ を掛ける．

$$\frac{\cancel{(3s+1)}}{s(2s+1)\cancel{(3s+1)}}=\frac{c_1(3s+1)}{s}+\frac{c_2(3s+1)}{2s+1}+\frac{c_3\cancel{(3s+1)}}{\cancel{3s+1}}$$

上式の両辺の s に，$3s+1=0$ から得た $s=-(1/3)$ を代入すると，
$-9=c_3$ を得る．
したがって，次のように展開できる．

$$\frac{1}{s(2s+1)(3s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{4}{2s+1}+\frac{-9}{3s+1}$$
$$=\frac{1}{s}+\frac{2}{s+(1/2)}-\frac{3}{s+(1/3)}$$

$D(s)=0$ の根が重根や，共役複素根をもつ場合には，ラプラス変換表中に記載の数式を組み合わせて与式を展開する．

代表的な伝達関数のラプラス逆変換の操作を，まとめて表3·2に示す．

表3·2　　ラプラス逆変換表

Laplace transform	Inverse Laplace transform: time function
$\frac{1}{Ts+1}=\frac{c}{(s+a)}$	ce^{-at}
$\frac{1}{s(Ts+1)}=\frac{c_0}{s}+\frac{c_1}{(s+a)}$	$c_0+c_1e^{-at}$
$\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{c_1}{(s+a_1)}+\frac{c_2}{(s+a_2)}$	$c_1e^{-a_1t}+c_2e^{-a_2t}$
$\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{c_0}{s}+\frac{c_1}{(s+a_1)}+\frac{c_2}{(s+a_2)}$	$c_0+c_1e^{-a_1t}+c_2e^{-a_2t}$

Laplace transform	Inverse Laplace transform: time function
$\dfrac{1}{(Ts+1)^2}=\dfrac{c}{(s+a)^2}$	cte^{-at}
$\dfrac{1}{s(Ts+1)^2}=\dfrac{c_0}{s}+\dfrac{c_1}{(s+a)}+\dfrac{c_2}{(s+a)^2}$	$c_0+c_1e^{-at}+c_2te^{-at}$
$\dfrac{1}{T^2s^2+2T\zeta s+1}=\dfrac{c\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$ce^{-at}\sin(\omega t)$
$\dfrac{1}{s(T^2s^2+2T\zeta s+1)}=\dfrac{c_0}{s}+\dfrac{c_1 s+c_2}{(s+a)^2+\omega^2}$ $=\dfrac{c_0}{s}+\dfrac{c_3\omega}{(s+a)^2+\omega^2}+\dfrac{c_4(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$	$c_0+c_3e^{-at}\sin(\omega t)+c_4e^{-at}\cos(\omega t)$ $=c_0+c_5e^{-at}\sin(\omega t+\phi)$ *

表3·2 中の係数$c,c_0,c_1,\cdots$およびa,a_1,a_2,ω,ϕの値と，原式中の係数T,T_1,T_2,ζとの関係を各自求めておくこと.

＊ ここで　$k_1\sin\theta+k_2\cos\theta=\rho\sin(\theta+\phi)$　の関係を用いる.
ただし，　$\rho=\sqrt{{k_1}^2+{k_2}^2}$,　$\phi=\tan^{-1}(k_2/k_1)$