## 3・3　伝達関数

プロセスの動特性を表す微分方程式は，ラプラス変換によって伝達関数(*transfer function*) の形で表現される．プロセスの入力を $x(t)$，出力を $y(t)$ とし，そのラプラス変換された複素関数を $X(s), Y(s)$ とすると，両者の間の関係を表す伝達関数は，その比として定義される．

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) \tag{3·12}$$

線型プロセスの伝達関数は，一般的に表すと，先に示した(3·9)式のように複素数 $s$ の多項式の比となる．

伝達関数の具体的な求めかたについて，第２章で述べたいくつかのプロセスを取り上げ，以下に説明する．

§2·1で取り上げた加熱タンク系の熱収支式は，(2·9)で与えられる．

$$\tau \frac{dT_o}{dt} = T_i - T_o + KQ \tag{2·9}$$

**定常状態** (*steady state*) での各変数を $T_o = T_{o,s}$, $T_i = T_{i,s}$, $Q = Q_s$ とし，(2·9)式に代入すると，

$$0 = T_{i,s} - T_{o,s} + KQ_s \tag{3·13}$$

次に，定常状態からの**偏差変数** (*deviation variable*) を，以下のように定めて，(2·9)式に代入する．

$$\begin{aligned} T_o(t) &= T_{o,s} + y(t) \\ T_i(t) &= T_{i,s} + x_1(t) \\ Q(t) &= Q_s + x_2(t) \end{aligned} \tag{3·14}$$

$$\tau\frac{dy(t)}{dt}=T_{i,s}+x_1(t)-T_{o,s}-y(t)+KQ_s+Kx_2(t)$$
$$=T_{i,s}-T_{o,s}+KQ_s+x_1(t)-y(t)+Kx_2(t) \qquad (3\cdot 15)$$

定常状態の関係式(3・13)式から,

$$\tau\frac{dy(t)}{dt}=x_1(t)-y(t)+Kx_2(t) \qquad (3\cdot 16)$$

ここで初期条件は, $t=0$: $y(t)=0$である [(2・9)式の初期条件は, $t=0$: $T_o(t)=T_{o,s}\neq 0$]. (3・16)式をラプラス変換する.

$$\tau sY(s)=X_1(s)-Y(s)+K\,X_2(s)$$

この式を整理して,

$$Y(s)=\frac{1}{\tau s+1}X_1(s)+\frac{K}{\tau s+1}X_2(s)=\frac{1}{\tau s+1}\{X_1(s)+K\,X_2(s)\}$$
$$=G_1(s)X_1(s)+G_2(s)X_2(s)=G_1(s)\{X_1(s)+K\,X_2(s)\}$$
$$(3\cdot 17)$$

ここで, $G_1(s)$は, 入力・入口流体温度変化$X_1(s)$に対する出力・出口流体温度変化$Y(s)$の間の伝達関数であり, $G_2(s)$は入力・ヒータ供給熱量変化$X_2(s)$に対する出力・$Y(s)$の間の伝達関数である.

§2・2で取り上げた管型反応器の物質収支式は, (2・11)式で与えられる.

$$\frac{\partial C(t,z)}{\partial t}=-v\frac{\partial C(t,z)}{\partial z}-kC(t,z) \qquad (2\cdot 11)$$

ここで, 化学反応が起きていない場合を想定すると, これは長さ$L$のパイプの中を濃度$C(t,z)$の流体が単に流れて行く場合に相当する.

このとき収支式は次のようになる．

$$\frac{\partial C(t,z)}{\partial t} = -v\frac{\partial C(t,z)}{\partial z} \tag{3·18}$$

このプロセスで，パイプ入口の流体濃度と出口での流体濃度の間の伝達関数を求める．まず，初期条件を，$t=0$, $C(0,z)=0$ として，(3·18)式をラプラス変換する．

$$sC(s,z) = -v\frac{dC(s,z)}{dz} \tag{3·19}$$

境界条件，$z=0, C(t,0)=C_i(t)$ をラプラス変換すると，$z=0$, $C(s,0)=C_i(s)$ となる．この条件のもとに(3·19)式を解くと，

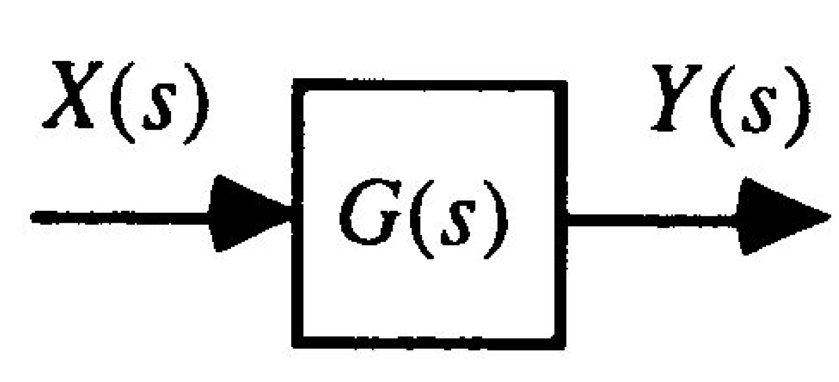
$$C(s,z) = e^{-(s/v)z}C_i(s) \tag{3·20}$$

パイプの出口濃度 $C_o(s)=C(s,L)$は，上式で $z=L$とすれば求まる．そこで，伝達関数は次のようになる．

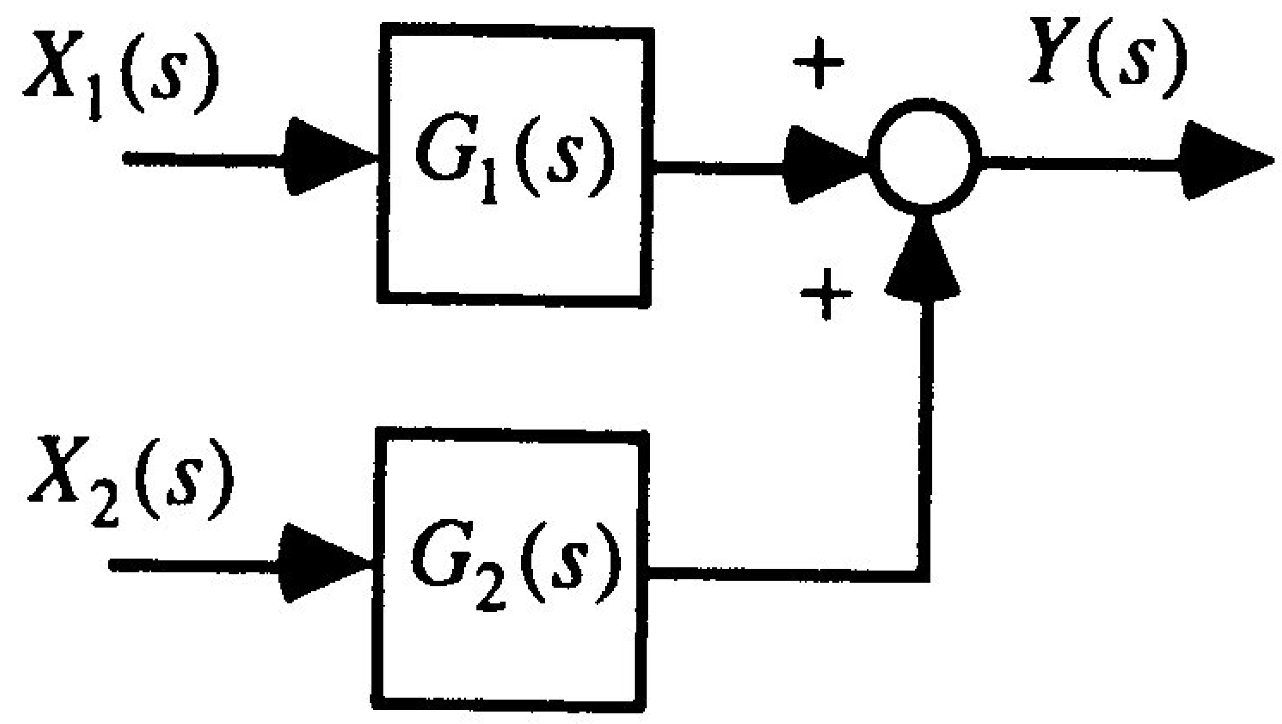
$$\frac{C_o(s)}{C_i(s)} = G(s) = e^{-(L/v)s} = e^{-\theta s} \tag{3·21}$$

この伝達関数はむだ時間要素とよばれ，入口濃度の変化が$\theta$ 時間たったのちに，出口の濃度変化として表れることを表している．ここで，$\theta=(L/v)$ は流体がパイプの中を通過するのに要する時間，すなわち押し出し流れの滞留時間を表す．

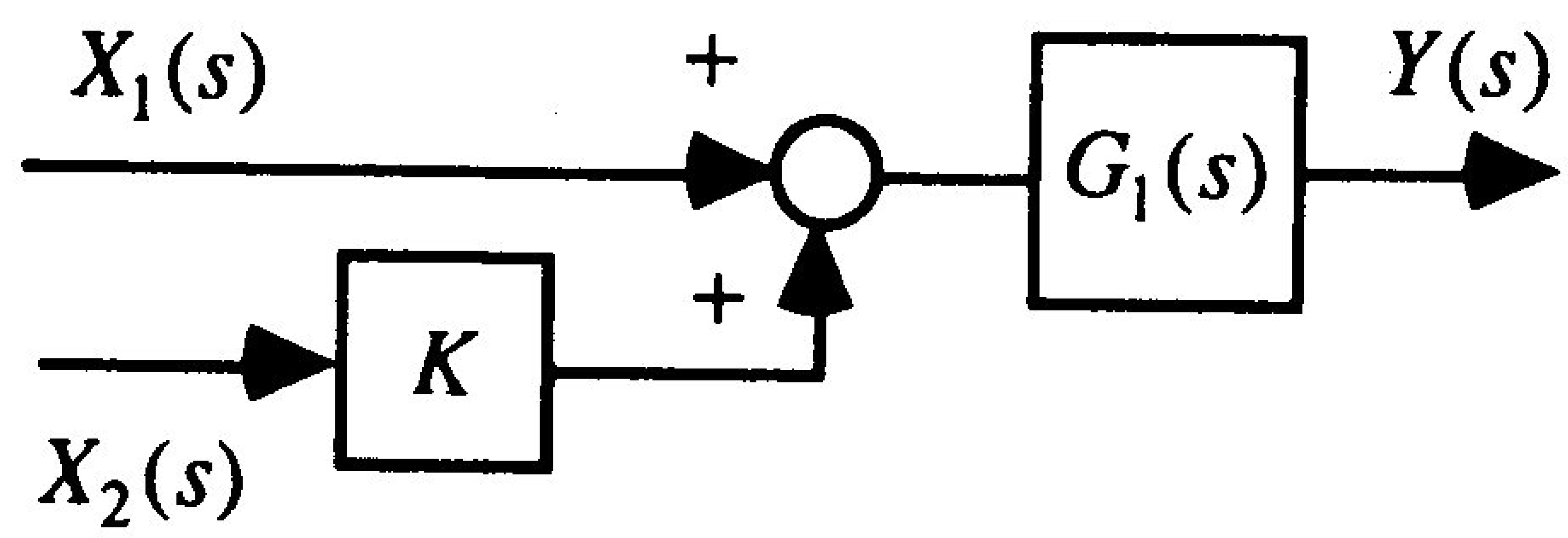
伝達関数は，ラプラス変換された入力と出力の比として定義されているから，これをブロック線図にて表現すると次のようになる．



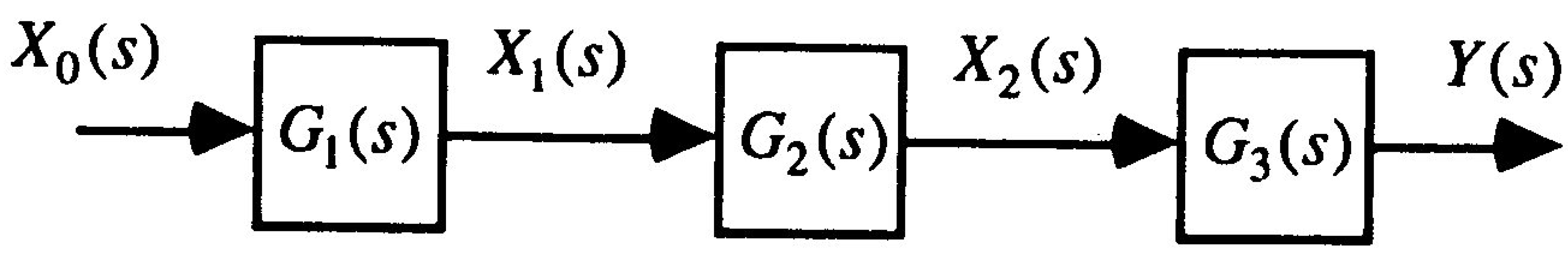
(3·17)式の関係は，次のようなブロック線図で表される．

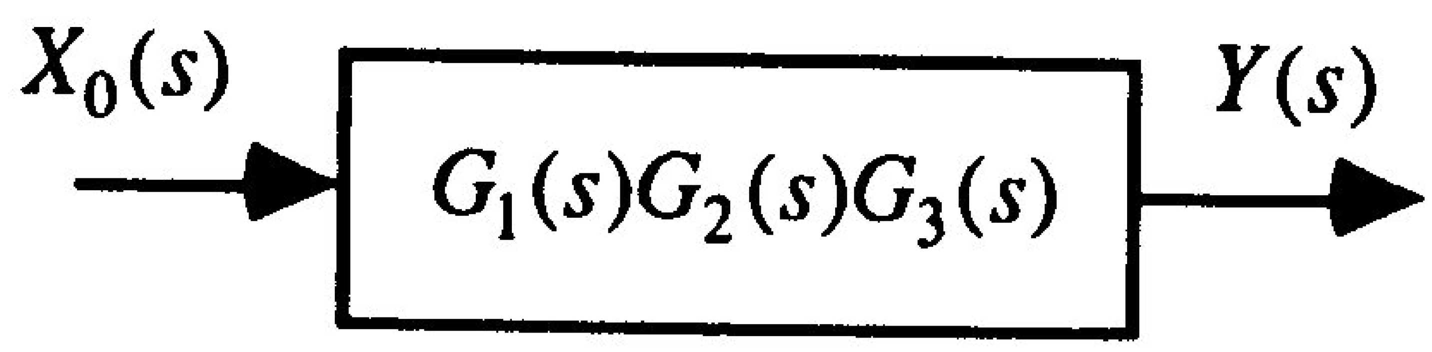



あるいは，

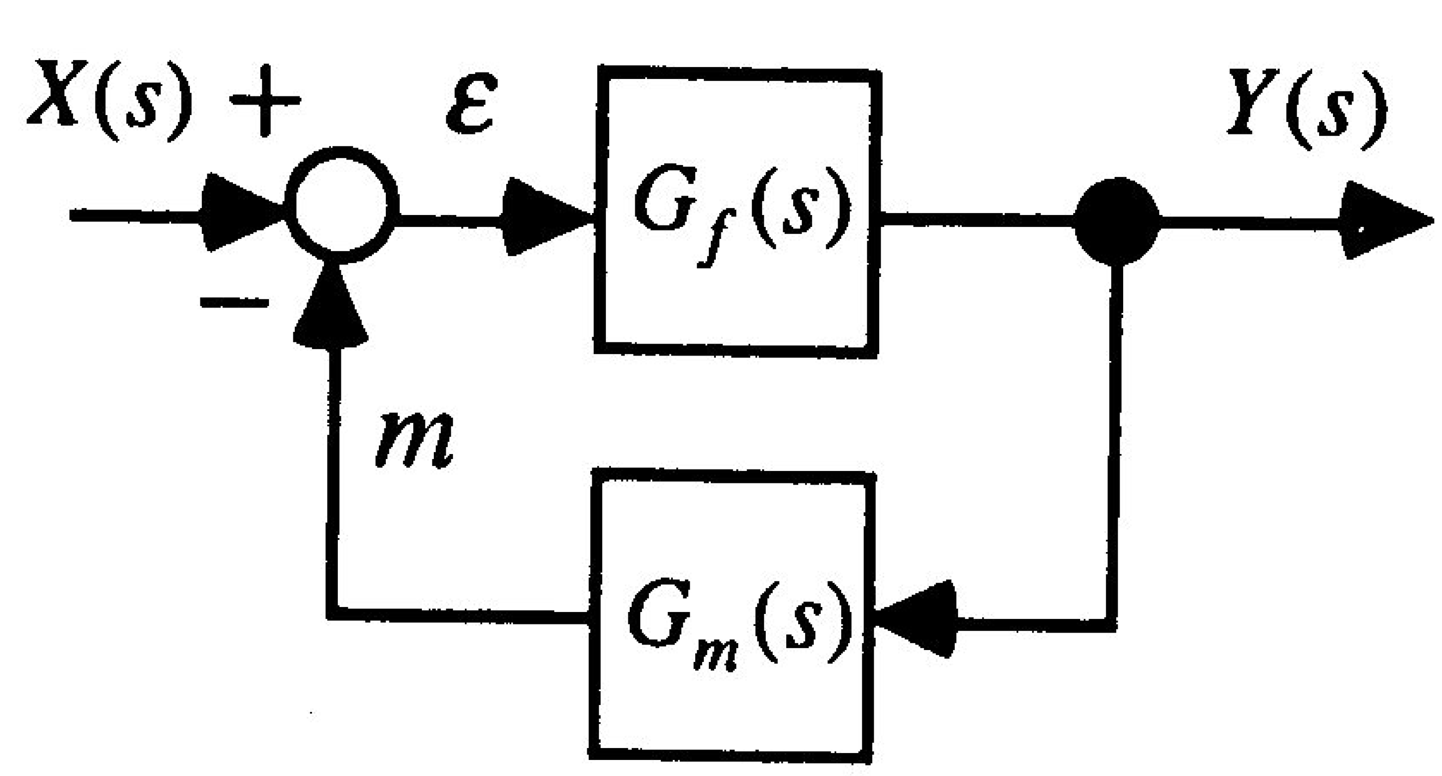



伝達関数が直列につながっている場合には，次のように簡略化することができる．

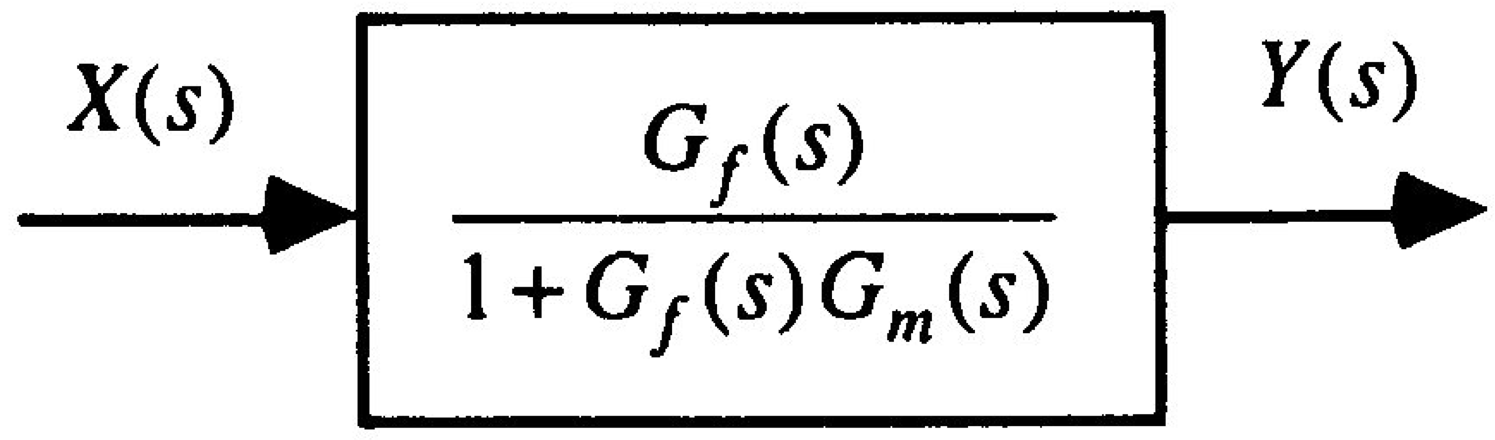



また次のように，フィードバックループを形成するブロック線図は，



以下のようにまとめることが可能となる．




フィードバックループを形成するブロック線図では，次のような関係式が成立する．

$$Y(s)=G_f(s)\varepsilon$$
$$\varepsilon=X(s)-m$$
$$m=G_m(s)Y(s)$$

上の3式から $\varepsilon, m$ を消去すると，

$$Y(s)=G_f(s)\{X(s)-G_m(s)Y(s)\}$$

この式を整理すると，次式が得られる．

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_f(s)}{1+G_f(s)G_m(s)}$$

上記のような操作を，**ブロック線図の等価変換** (*transformation of block diagram*)という．

プロセスの動特性は微分方程式で表され，これをラプラス変換して入・出力間の関係を求めると伝達関数が得られる．

次のような1次の常微分方程式から得られる伝達関数は，1次系・1次遅れ系(*first − order process, first − order lag*)と呼ばれる．

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=K\,x(t) \tag{3·22}$$

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1} \tag{3·23}$$

ここで，$T$ は**時定数**(*time constant*) と呼ばれ時間の次元をもつ定数である．$K$ は**定常ゲイン**(*steady－state gain*) あるいは単にゲイン(*gain*)と呼ばれ，その次元はプロセスの入力と出力の次元の比となる．

次のような微分方程式から得られる伝達関数は，**積分要素**(*integrator*)と呼ばれる．

$$T\frac{dy(t)}{dt}=K\,x(t) \tag{3·24}$$

$$G(s)=\frac{K}{Ts}=\frac{K^*}{s} \tag{3·25}$$

2 次の線型微分方程式からは，**2 次遅れ系** (*second－order system*) の伝達関数が得られる．

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=bx \tag{3·26}$$

$$G(s)=\frac{b}{a_0s^2+a_1s+a_2} \tag{3·27}$$

上記の伝達関数は，分母が因数分解できれば 1 次遅れ要素が 2 個直列に結合した系と等しくなる．

$$G(s)=\frac{b}{a_0(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)} \tag{3·28}$$

(3·27)式は一般に次のように書き直すことができる.

$$G(s)=\frac{K}{T^2s^2+2T\zeta s+1} \tag{3·29}$$

ここで，$T^2=a_0/a_2, 2T\zeta=a_1/a_2, K=b/a_2$ である．$T$は時間の次元をもち，**固有振動周期**(*natural period of oscillation*)と呼ばれる．$\zeta$は無次元のパラメータで**減衰係数**(*damping factor*)と呼ばれる．(3·27)式分母の代数方程式が実数根をもつ場合には$\zeta>1$となりこのとき(3·29)式は(3·28)式のように書き直すことができる．$\zeta=1$の場合には(3·29)式は次式となる.

$$G(s)=\frac{K}{(Ts+1)^2} \tag{3·30}$$

$\zeta<1$の場合には，(3·27)式分母の代数方程式は共役複素根をもつ．パラメータ，$T, \zeta$ の物理的意味については，のちに§4·2で説明する.

線型の高次遅れ系では，その伝達関数は(3·9)式のように$s$の多項式なる．この式を展開すると，必ず，積分要素，1次遅れ系，および2次遅れ系の組合わせとなる（$n>m$ の場合）．プロセス制御系では，その他に，(3·21)式で与えれる非線型のむだ時間要素がしばしば現れる.