4　過渡応答

プロセスの動特性は，先の第2章では微分方程式で，また第3章では伝達関数にて表現することを学んだ．この章では動特性を各種の応答で表現することを学ぶ．応答の中でも定常応答の一つである周波数応答については第5章で説明することとし，この章では**過渡応答** (*transient response*) について解説する．過渡応答とは，出力が初期の定常状態から変化を開始し次の定常状態に移行する間の挙動をいう．

入力と出力をラプラス変換して，その比をとったものが伝達関数である．そこで，この伝達関数が与えられた場合，過渡応答は次の手順で求めることができる．まず，入力 $x(t)$ をラプラス変換して関数 $X(s)$ を求める．次いで，伝達関数に $X(s)$ を掛けた出力 $Y(s) = G(s)X(s)$ を求める．そして，これを逆ラプラス変換して得られる $y(t)$ が，入力 $x(t)$ に対する過渡応答となる．

プロセスの過渡応答を調べる目的で使用される入力には，その関数関係が比較的単純な次のような入力がしばしば用いられる．すなわち，単位ステップ入力，単位パルス入力，単位インパルス入力およびランプ入力である．ここで単位とは，大きさが1あるいは積分値が1のことを表す．これらの入力を図示すると以下のようになる．

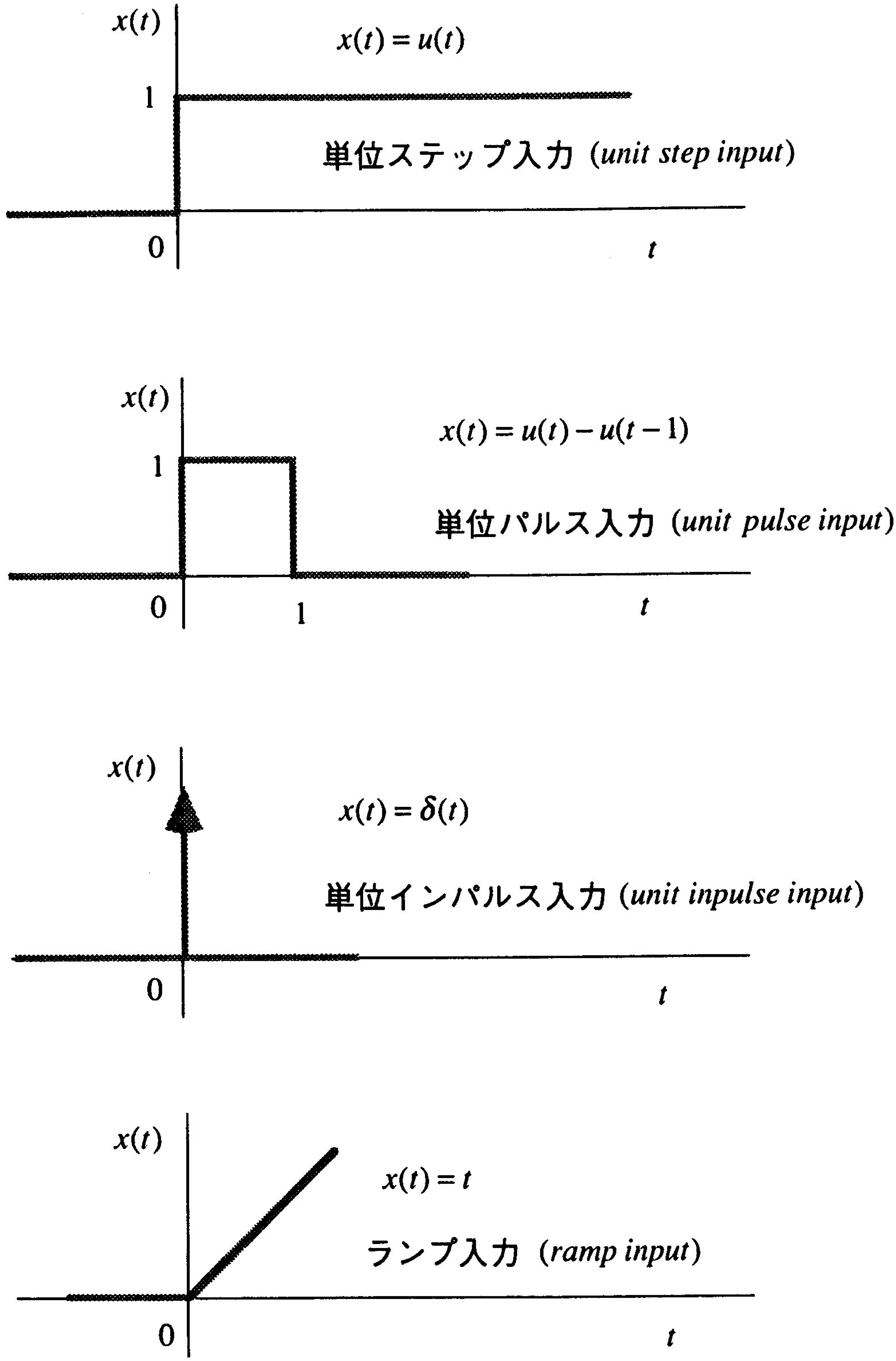

図4・1　　典型的な入力の形状

4・1 インパルス応答

インパルス入力に対する応答，すなわちインパルス応答(*impulse response*) を求める．単位インパルス入力をラプラス変換すると，

$$X(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{4・1}$$

したがって，この入力に対する応答は，

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \\ &= g(t) \end{aligned} \tag{4・2}$$

すなわち，インパルス応答は伝達関数そのものをラプラス逆変換したもので $g(t)$ と表記することがある．各種の伝達関数の逆ラプラス変換は表3・2から求まる．

積分要素のインパルス応答は次のようになる．

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \tag{4・3}$$

すなわち，インパルス関数の積分値である 1 となり，単位ステップ関数と等しくなる．

1 次遅れ系のインパルス応答は次のようになる．

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{Ts+1}\right\} = K\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1/T)}{s+(1/T)}\right\} = \frac{K}{T}e^{-t/T} \tag{4・4}$$

1 次遅れ要素が 2 個連なった 2 次遅れ系の応答は，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\right\} = K\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{s+(1/T_1)} + \frac{c_2}{s+(1/T_2)}\right\}$$

$$= K\left(c_1 e^{-t/T_1} + c_2 e^{-t/T_2}\right) \qquad (4\cdot5)$$

ここで$T_1 > T_2$として，係数は次のようになる．

$$c_1 = \frac{1}{T_1 - T_2}, \quad c_2 = \frac{-1}{T_1 - T_2}$$

共役複素根を分母にもつ2次遅れ系のインパルス応答は次のようになる．

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{T^2 s + 2T\zeta s + 1}\right\} = K\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right\}$$

$$= Kce^{-at}\sin(\omega t) \qquad (4\cdot6)$$

ここで$\zeta < 1$で，係数は次のようになる．

$$c = \frac{1}{T\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad a = \frac{\zeta}{T}, \quad \omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}$$

4・2　ステップ応答

ステップ入力に対する応答，ステップ応答(*step response*) を求める．単位ステップ入力をラプラス変換すると，次のようになる．

$$X(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \tag{4・7}$$

積分要素のステップ応答は，次のようになる．

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\right\} = t \tag{4・8}$$

すなわち，ステップ関数を積分するとランプ関数になる．

1次遅れ系のステップ応答は次のようになる．

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}\right\} = K\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s+(1/T)}\right\}$$

$$= K\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{-1}{s+(1/T)}\right\} = K\left(1 - e^{-t/T}\right) \tag{4・9}$$

1次遅れ要素が2個連なった2次遅れ系の応答は，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\cdot\frac{1}{s}\right\}$$

$$= K\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s+(1/T_1)} + \frac{c_2}{s+(1/T_2)}\right\}$$

$$= K\left\{c_0 + c_1 e^{-t/T_1} + c_2 e^{-t/T_2}\right\} \tag{4・10}$$

ここで$T_1 > T_2$として，係数は次のようになる．

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{-T_1}{T_1 - T_2}, \quad c_2 = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

共役複素根を分母にもつ２次遅れ系（$\zeta < 1$）のステップ応答は次のようになる．

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{T^2 s + 2T\zeta s + 1}\cdot\frac{1}{s}\right\}$$

$$= K\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_0}{s} + \frac{c_1 s + c_2}{(s+a)^2 + \omega^2}\right\}$$

$$= K\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_0}{s} + \frac{c_3\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} + \frac{c_4(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}\right\}$$

$$= K\left\{c_0 + c_3 e^{-at}\sin(\omega t) + c_4 e^{-at}\cos(\omega t)\right\}$$

$$= K\left\{c_0 + c_5 e^{-at}\sin(\omega t + \phi)\right\} \tag{4·11}$$

ここで，係数は次のようになる．

$$a = \frac{\zeta}{T}, \quad \omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -1, \quad c_2 = -2a$$

$$c_3 = -\frac{a}{\omega} = -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad c_4 = -1$$

$$c_5 = -\sqrt{c_3^2 + c_4^2} = \frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left\{\frac{c_4}{c_3}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right\}$$

ステップ入力はインパルス入力を積分したものに等しい．そこで，その応答であるステップ応答は，インパルス応答を時間で積分した形となっている．また，ランプ入力は，ステップ入力を積分した形となっており，その応答はステップ応答を積分した形となる．

1次遅れ系のステップ応答の計算例を図4･2に示す．

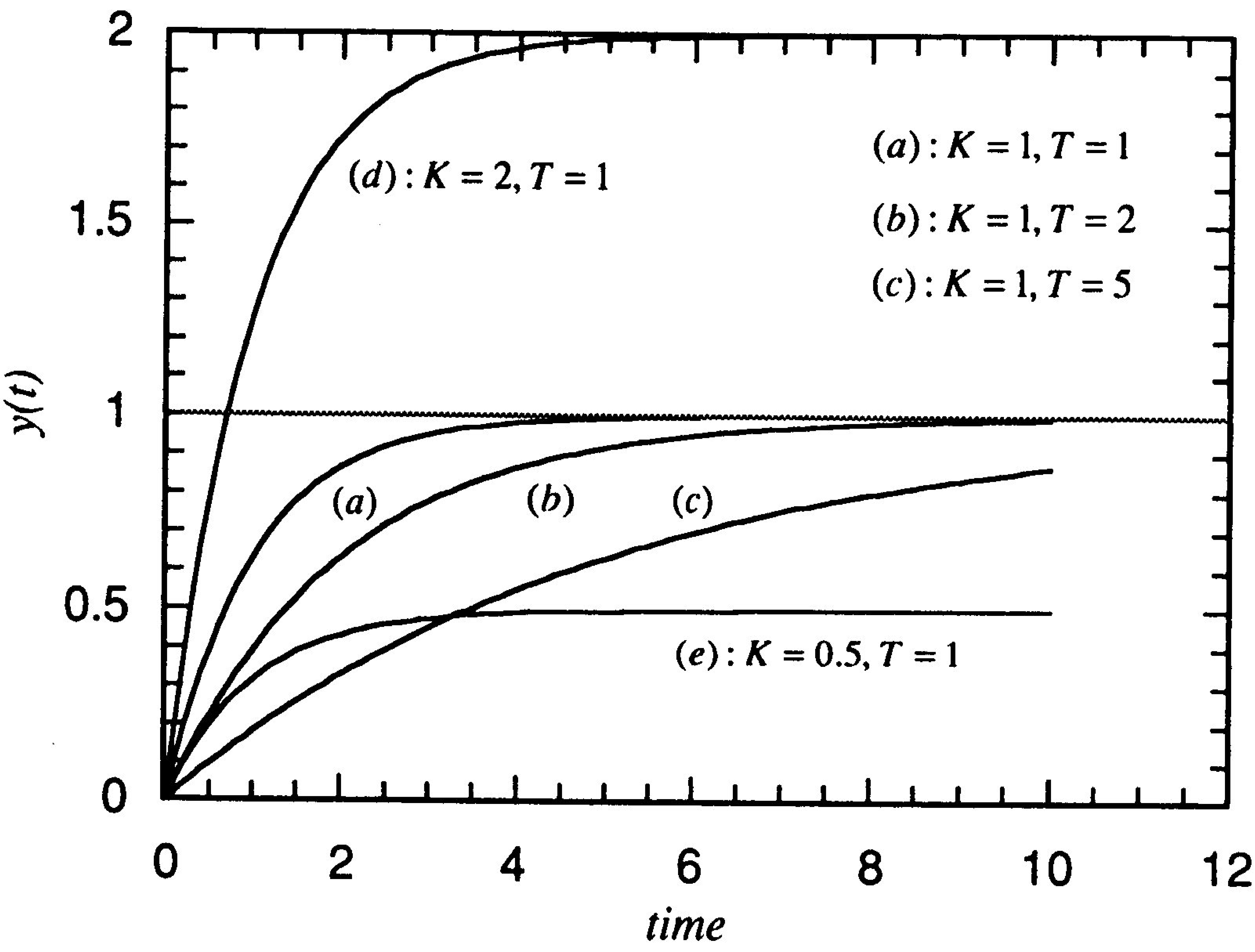

図4･2　　1次遅れ系のステップ応答

上記の応答を見ると，時定数Tが一定で，ゲインKを変化されると，応答の大きさが変化する．ゲインが一定で，時定数を，1，2，5と変化させると，その応答は次第に遅くなる．すなわち，時定数はそのプロセスの応答の速度を示すパラメータで，この値が小さいほど応答は速くなる．(4･9)式で，$K=1$ とし，$t=T$,

$3T$, $5T$ における出力を計算すると $y(t)=0.632$, 0.950, 0.993 となる．ここから，ステップ応答の全変化の 63.2 % となる時間が，そのプロセスの時定数に等しいことがわかる．また，時定数の 3 ~ 5 倍の時間が経過するとステップ応答はほぼ収束(95 ~ 99 %) することがわかる．

$\zeta \le 1$ の場合の典型的な 2 次遅れ要素のステップ応答を，図4･3 に示す．

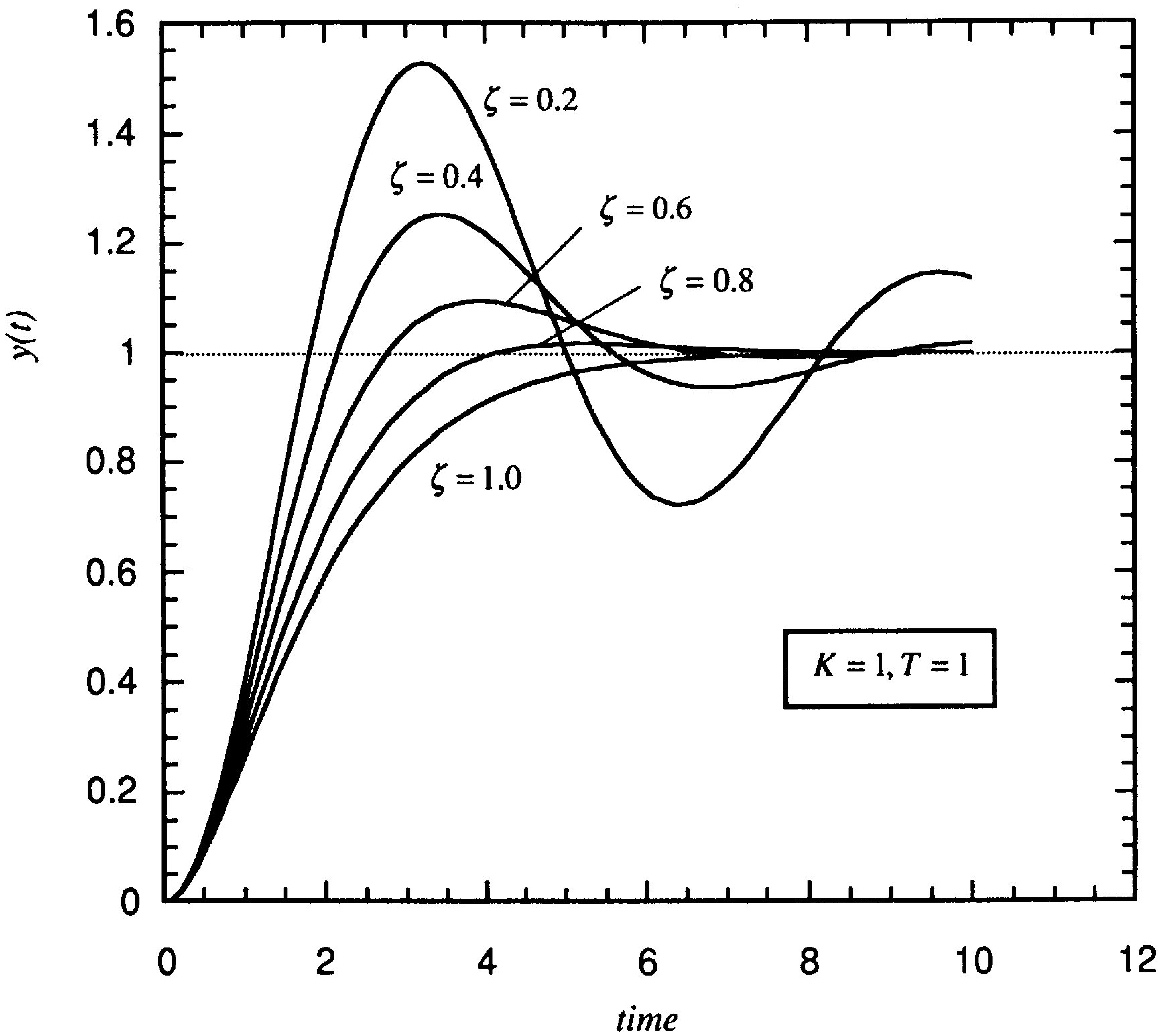

図 4･3　　2 次遅れ系のステップ応答

上記の応答からわかるように，減衰係数ζが1より小さい場合，そのステップ応答には振動部分が現れる．この応答を**不足制動応答**(*underdamped or oscillatory response*)といい，ζが小さくなるほど応答の振動性は激しくなる．振動性の応答が最終値よりも大きくなる部分を，**オーバーシュート・行過ぎ量**(*overshoot*)といい，これは減衰係数によって支配され，その最初の行過ぎ量OSは，次式で与えられる．

$$\mathrm{OS} = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \qquad (4\cdot 12)$$

Tは，時間の次元をもち，応答の速度を示すパラメータで，この値が小さいほど応答は速くなり，また振動性応答の周期も小さくなる．応答の**振動周期**(*period of oscillation*)は次式によって与えられる．

$$P = \frac{2\pi T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (4\cdot 13)$$

振動性の応答が，最終値の値を最初によぎるまでの時間を**立ち上がり時間**(*rise time*)といい，応答が最終値の±5%以内に収まるまでの時間を(95%)**制定時間**(*response time*)という．

減衰係数が1より大きい場合には，ステップ応答に振動部分がみられず，その応答はS字形となる．この応答を**過制動応答**(*overdamped or nonoscillatory response*)といい，その一般式は(4·10)式で与えられる．