5　周波数応答

プロセスの動特性を表現する方法の一つに**周波数応答** (*frequency response*) がある．この応答は，サイン状入力 (*sinusoidal input*) に対する定常応答（入力が入ってからじゅうぶん時間が経過し，過渡応答の部分が消滅した後の応答）のことを指している．

この応答を特徴づける周波数特性として，ゲイン特性および位相特性がある．**ゲイン特性** (*gain characteristics*)とは，サイン状の入力の振幅に対する出力の振幅の比（振幅比，*amplitude ratio*：AR）で与えられる．この比が入力の周波数によってどのように変化するか，がゲイン特性である．また，**位相特性** (*phase characteristics*) とは入力に対して，出力の位相*がどの程度ずれているかを示すものである．この位相のずれ（ *phase shift* : PS ）が周波数によってどのように変化するのかが位相特性である．

*　波状に変化する信号のある任意の起点に対する相対的位置のこと．通常，1サイクルを360°または2πラジアンとして，位相を角度で表す．

いま，入力を$A\sin(\omega t)$とし，定常出力を$B\sin(\omega t+\phi)$とすると，ゲイン特性はAR$=B/A$，位相特性はPS$=\phi$となる．これらの値が，入力の周波数ω [rad/time] によってどのように変化するかを調べることが周波数特性を求めることとなる．

周波数応答を模式的に示すと以下のようになる．

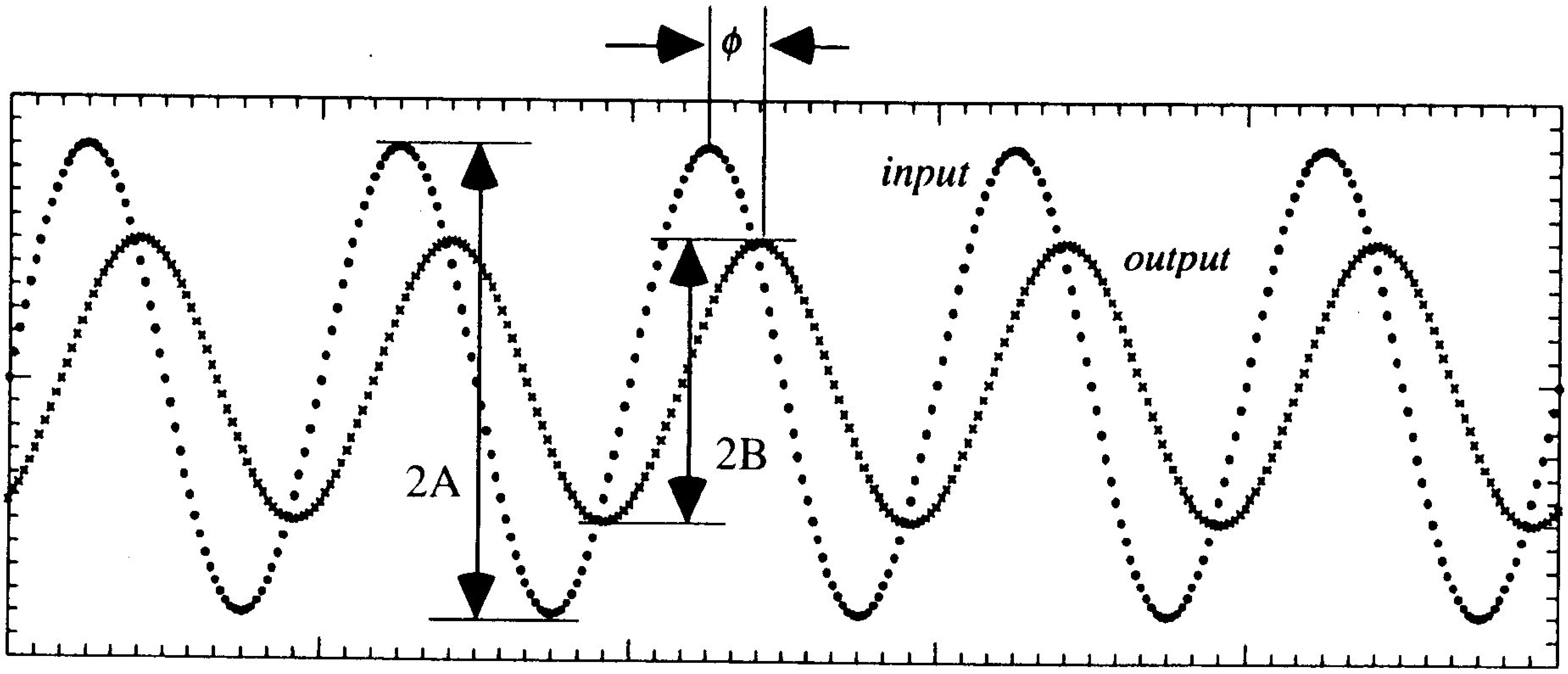


図 5.1　周波数応答

ここで，周波数 ω[rad/time] について説明する．この周波数は角周波数と呼ばれ，単位時間に角度として何ラジアン変化するかを示すものである．1 周期は 2π rad であるから，サイクル周波数 f[cycle/time] は $f = \omega / 2\pi$ となり，周期 T_p [time/cycle] は $T_p = 1/f = 2\pi/\omega$ となる．

周波数ω が小さい場合には，単位時間あたりの振動数は少なくなり，その周期は大きくなる．ω がゼロとなる入力信号は，直流信号を表す．ω が非常に大きい入力は，高周波入力と呼ばれ，プロセス制御では，計測信号に含まれるノイズなどがこれに当る．また，流れの計測において乱流領域での測定値には高周波成分が含まれている．

5・1　1次遅れ系の周波数応答

1次遅れ系のプロセスに対する周波数応答の求め方を以下に述べる．

いま，入力として次のようなサイン関数を考える．

$$x(t) = A\sin(\omega t) \tag{5.1}$$

このラプラス変換は次式のようになる．

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{5.2}$$

したがって，1次遅れ系の出力は，

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{c_1}{s + (1/T)} + \frac{c_2\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{c_3 s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \tag{5.3}$$

となり，上式を逆ラプラス変換することによって，次式の応答が得られる．

$$y(t) = c_1 e^{-t/T} + c_2 \sin(\omega t) + c_3 \cos(\omega t) \tag{5.4}$$

ここで，

$$c_1 = \frac{KA(T\omega)}{(T\omega)^2 + 1}, \qquad c_2 = \frac{KA}{(T\omega)^2 + 1}, \qquad c_3 = -c_1$$

である．

いま，入力が入ってからじゅうぶん時間が経過したときには，(5.4)式右辺の第1項はゼロとなる．すなわち，このプロセスのサイ

ン入力に対する定常応答は次のようになる.

$$y(t)_{sd} = c_2 \sin(\omega t) + c_3 \cos(\omega t) = B \sin(\omega t + \phi) \tag{5.5}$$

ここで,

$$B = \sqrt{c_2^2 + c_3^2} = \frac{KA}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} \tag{5.6}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_3}{c_2}\right) = \tan^{-1}(-T\omega) = -\tan^{-1}(T\omega) \tag{5.7}$$

したがって，入力の振幅に対する定常出力の振幅比は,

$$\mathrm{AR} = B / A = \frac{K}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} \tag{5.8}$$

位相のずれは,

$$\mathrm{PS} = \phi = -\tan^{-1}(T\omega) \tag{5.9}$$

となる.

位相のずれは，上式からわかるように負となる．このようなプロセスを位相遅れプロセスという．1次遅れプロセスでは，ω がゼロから ∞ まで変化すると，位相はゼロから $-\pi/2 = -90^\circ$ 遅れる.

ゲイン特性は，(5.8)式から明らかなように，ω が小さい時には $(\omega \approx 0)$，K である．すなわち，入力信号が K 倍された出力信号が得られる．しかし，ω が大きくなると AR は次第に小さくなり，$\omega = 1/T$ では，$\mathrm{AR} = K/\sqrt{2} = 0.707K$，さらに ω が大きくなると，$\mathrm{AR} \approx K/(T\omega)$ となる.

5・2　周波数伝達関数

前節では，1次遅れ系の周波数応答を，ラプラス変換・逆ラプラス変換を使って求め，そのゲイン特性，位相特性を算出した．ここでは，伝達関数$G(s)$をもつ一般的なプロセスを取り上げ，その周波数特性を求める方法について解説する．

いま，一般的な伝達関数が次式で与えられるものとする．

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \\ &= \frac{N(s)}{a_0(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)(s+\lambda_3)\cdots(s+\lambda_{n-1})(s+\lambda_n)} \end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.1)式のサイン状入力に対する出力は，次のようになる．

$$Y(s) = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = G(s)A\frac{\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \tag{5.11}$$

上式に，(5.10)式を代入して，部分分数に分ける．

$$\begin{aligned} G(s)A\frac{\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} &= \frac{c_1}{(s+\lambda_1)} + \frac{c_2}{(s+\lambda_2)} + \cdots \\ &\quad + \frac{c_n}{(s+\lambda_n)} + \frac{d_1}{(s-j\omega)} + \frac{d_2}{(s+j\omega)} \end{aligned} \tag{5.12}$$

ここで，係数d_1, d_2 を次のようにして求める．まず上式の両辺に$(s-j\omega)$を掛ける．

$$\begin{aligned} G(s)A\frac{\omega\cancel{(s-j\omega)}}{\cancel{(s-j\omega)}(s+j\omega)} &= \frac{c_1(s-j\omega)}{(s+\lambda_1)} + \frac{c_2(s-j\omega)}{(s+\lambda_2)} + \cdots \\ &\quad + \frac{c_n(s-j\omega)}{(s+\lambda_n)} + \frac{d_1\cancel{(s-j\omega)}}{\cancel{(s-j\omega)}} + \frac{d_2(s-j\omega)}{(s+j\omega)} \end{aligned} \tag{5.13}$$

上式を整理すると，

$$G(s)A\frac{\omega}{(s+j\omega)}=\frac{c_1(s-j\omega)}{(s+\lambda_1)}+\frac{c_2(s-j\omega)}{(s+\lambda_2)}+\cdots+\frac{c_n(s-j\omega)}{(s+\lambda_n)}+d_1+\frac{d_2(s-j\omega)}{(s+j\omega)} \tag{5.14}$$

ここで，両辺の s に $j\omega$ を代入する．

$$G(j\omega)A\frac{1}{2j}=d_1 \tag{5.15}$$

同様にして，(5.12)式の両辺に $(s+j\omega)$ を掛けてから，両辺の s に $(-j\omega)$ を代入すると，

$$G(-j\omega)A\frac{-1}{2j}=d_2 \tag{5.16}$$

が得られる．

(5.12)式を逆変換すると，次式が得られる．

$$y(t)=c_1e^{-\lambda_1 t}+c_2e^{-\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{-\lambda_n t}+d_1e^{+j\omega t}+d_2e^{-j\omega t} \tag{5.17}$$

ここで，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ が正の実数であれば*，時間が充分経過した後には，$e^{-\lambda_1 t},e^{-\lambda_2 t},\cdots e^{-\lambda_n t}$ はゼロとなり，次式のような定常応答が得られる．

* λ_k が負の場合にはプロセス自体が不安定となるため，定常応答は得られない．系の安定性については後に解説する．

$$y(t)_{sd}=d_1e^{j\omega t}+d_2e^{-j\omega t}=G(j\omega)A\frac{e^{j\omega t}}{2j}+G(-j\omega)A\frac{-e^{-j\omega t}}{2j} \tag{5.18}$$

上式中の，$G(j\omega)$，$G(-j\omega)$ は，(5.10)式中の s を $j\omega$ あるいは $-j\omega$ に置き換えたもので，これらは複素数となり次式に示すような共役複素数となる．

$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega) \\
G(-j\omega) &= \mathrm{Re}(\omega) - j\,\mathrm{Im}(\omega)
\end{aligned}
$$

＊ P60，61 のカコミ記事を参照

また，その極座標形*は次のようになる．

$$
G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi},\quad G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\phi}
$$

ここで，$\phi = \angle G(j\omega)$ は位相角である．この関係式を(5.18)式に代入して整理すると，

$$
\begin{aligned}
y(t)_{sd} &= |G(j\omega)|e^{j\phi} A \frac{e^{j\omega t}}{2j} + |G(j\omega)|e^{-j\phi} A \frac{-e^{-j\omega t}}{2j} \\
&= A|G(j\omega)| \left\{ \frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} \right\} \\
&= A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

したがって，ゲイン特性および位相特性は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AR} &= |G(j\omega)| \\
\mathrm{PS} &= \phi = \angle G(j\omega)
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

となる．

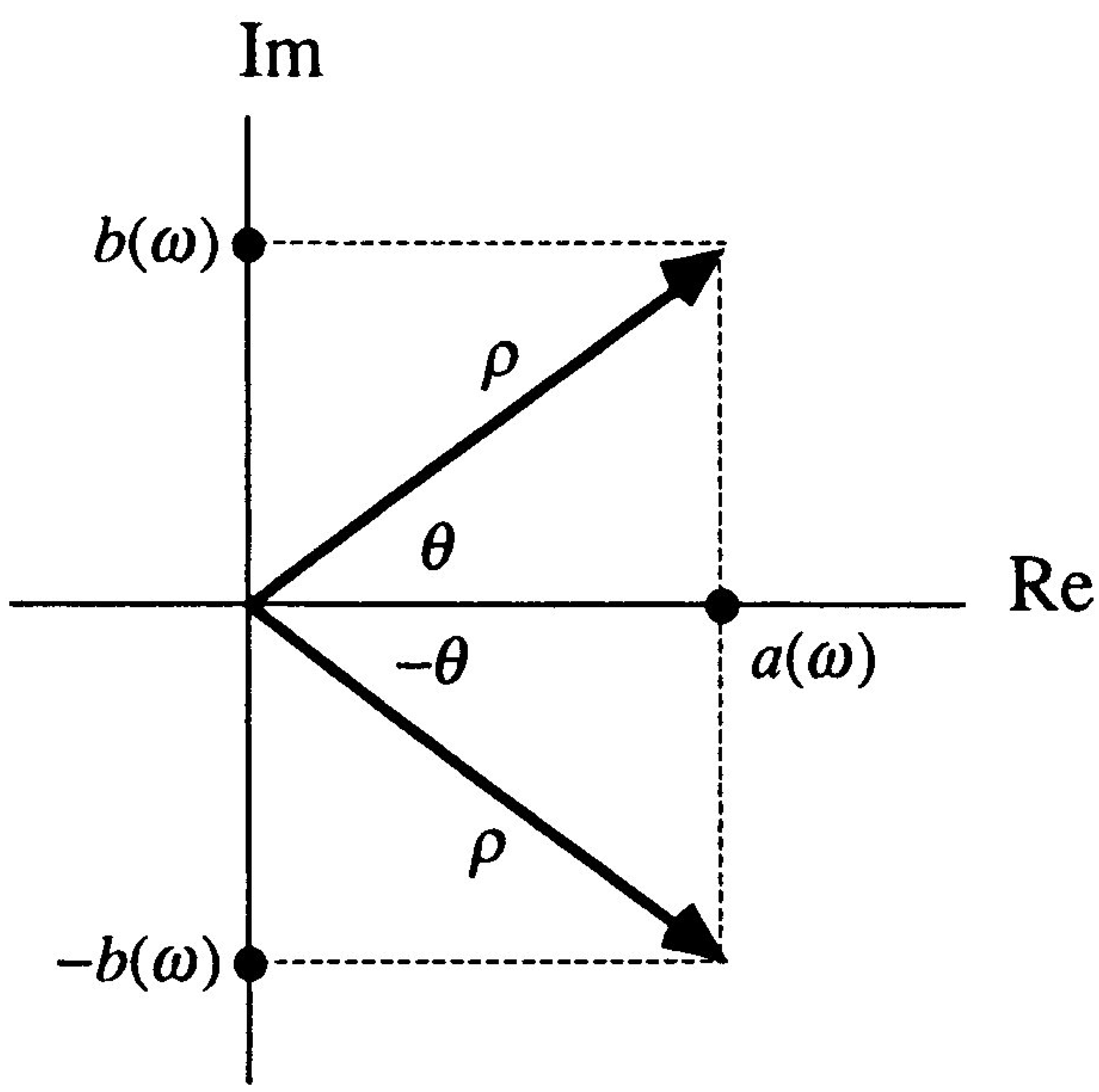
ここで，伝達関数 $G(s)$ の s を $j\omega$ で置き換えた，$G(j\omega)$ を**周波数伝達関数** (*frequency transfer function*) という．これは，先にも述べたように，ω をパラメータとする複素数で，その実数部と虚数部をから，$G(j\omega)$ の絶対値と位相角は次のように求まる．

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}(\omega)^2 + \mathrm{Im}(\omega)^2}$$
$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\{\mathrm{Im}(\omega)/\mathrm{Re}(\omega)\} \tag{5.21}$$

複素数 s の関数 $F(s)$ があって，この s を $j\omega$ で置き換えた $F(j\omega)$ と，s を $-j\omega$ で置き換えた $F(-j\omega)$ とは，共役となる．

$$F(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$$
$$F(-j\omega) = a(\omega) - jb(\omega)$$

この複素ベクトルを $s-$ 平面に描くと次のようになる．



したがって，このベクトルの絶対値 ρ と，位相角 $\pm\theta$ は次のようになる．

$$|F(\pm j\omega)| = \rho = \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}$$
$$\angle F(\pm j\omega) = \pm\theta = \tan^{-1}\{\pm b(\omega)/a(\omega)\}$$

ここで,

$$a(\omega) = \rho\cos\theta$$
$$b(\omega) = \rho\sin\theta$$

と表せるから,

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= a(\omega) + j\,b(\omega) \\ &= \rho(\cos\theta + j\sin\theta) \\ &= \rho\,e^{j\theta} = |F(j\omega)|\,e^{j\theta} \end{aligned}$$

となる.これを極座標形式でのベクトル表示という.同様にして,

$$\begin{aligned} F(-j\omega) &= a(\omega) - j\,b(\omega) \\ &= \rho(\cos\theta - j\sin\theta) \\ &= \rho\,e^{-j\theta} = |F(j\omega)|\,e^{-j\theta} \end{aligned}$$

となる.

上式の展開には,次のオイラーの公式(*Eyler' s formula*)を使用している.

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}, \quad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, \quad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

§5・1で求めた1次遅れプロセスの周波数特性を周波数伝達関数から求めてみる.1次遅れの周波数伝達関数は,次のように展開される.

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{T(j\omega)+1} = \frac{K(1-jT\omega)}{(1+jT\omega)(1-jT\omega)} \\ &= \frac{K}{1+(T\omega)^2} - j\frac{KT\omega}{1+(T\omega)^2} \end{aligned} \tag{5.22}$$

したがって，(5.20)，(5.21)式から

$$\mathrm{AR} = |G(j\omega)| = \sqrt{\left\{\frac{K}{1+(T\omega)^2}\right\}^2 + \left\{\frac{-KT\omega}{1+(T\omega)^2}\right\}^2} = \frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \tag{5.23}$$

$$\mathrm{PS} = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left\{\frac{-KT\omega}{1+(T\omega)^2} \Big/ \frac{K}{1+(T\omega)^2}\right\} = -\tan^{-1}(T\omega) \tag{5.24}$$

となり，先に求めた(5.8)，(5.9)式と等しくなる．

伝達関数が2個，直列に連なった総括の伝達関数を考えると，その周波数特性は，それぞれの周波数伝達関数のベクトル演算から，次のように与えられる．

$$G_{ov}(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$\begin{aligned} |G_{ov}(j\omega)| &= |G_1(j\omega)| \times |G_2(j\omega)| \\ \angle G_{ov}(j\omega) &= \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \end{aligned} \tag{5.25}$$

上記の関係を利用すると，高次の伝達関数の周波数特性は，基本的な積分要素，1次遅れ要素，2次遅れ要素およびむだ時間要素の周波数伝達関数から，容易に算出することができる．