

5・3 周波数応答の図的表現

周波数伝達関数から、(5.20)式のようにその絶対値および位相角を求めると、これがプロセスの周波数特性、ゲイン特性と位相特性になる。ここで、周波数伝達関数は ω をパラメータとする複素数であるから、ゲイン特性および位相特性も周波数の関数となる。これらの関数関係を2枚1組のグラフにて表したものがボード線図(Bode diagrams)である。

1次遅れ要素のボード線図を以下に示す。ここでは、プロセスのゲインを $K=1$ ，時定数を $T=1$ とした。

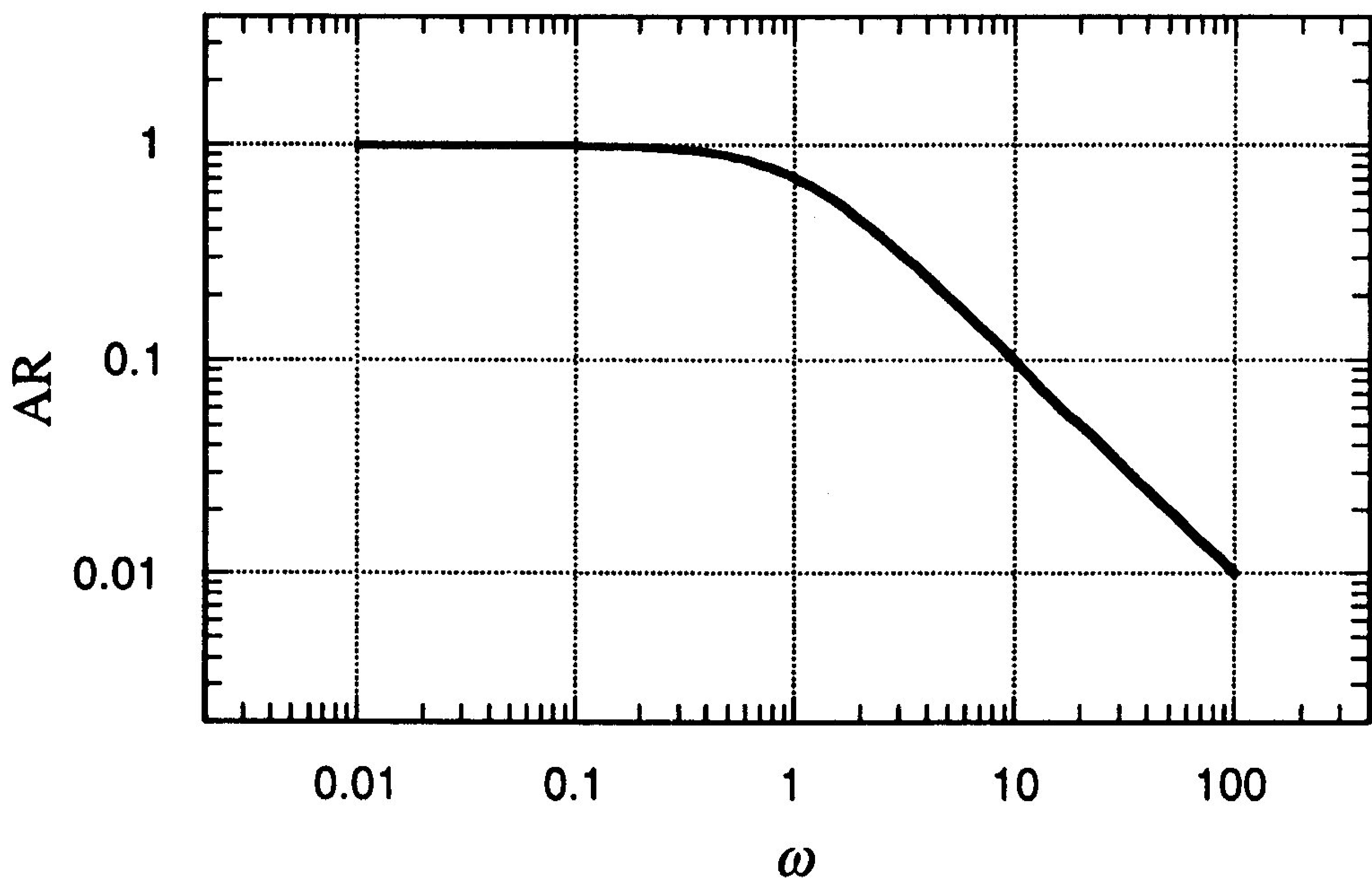


図 5・2(a) ゲイン線図

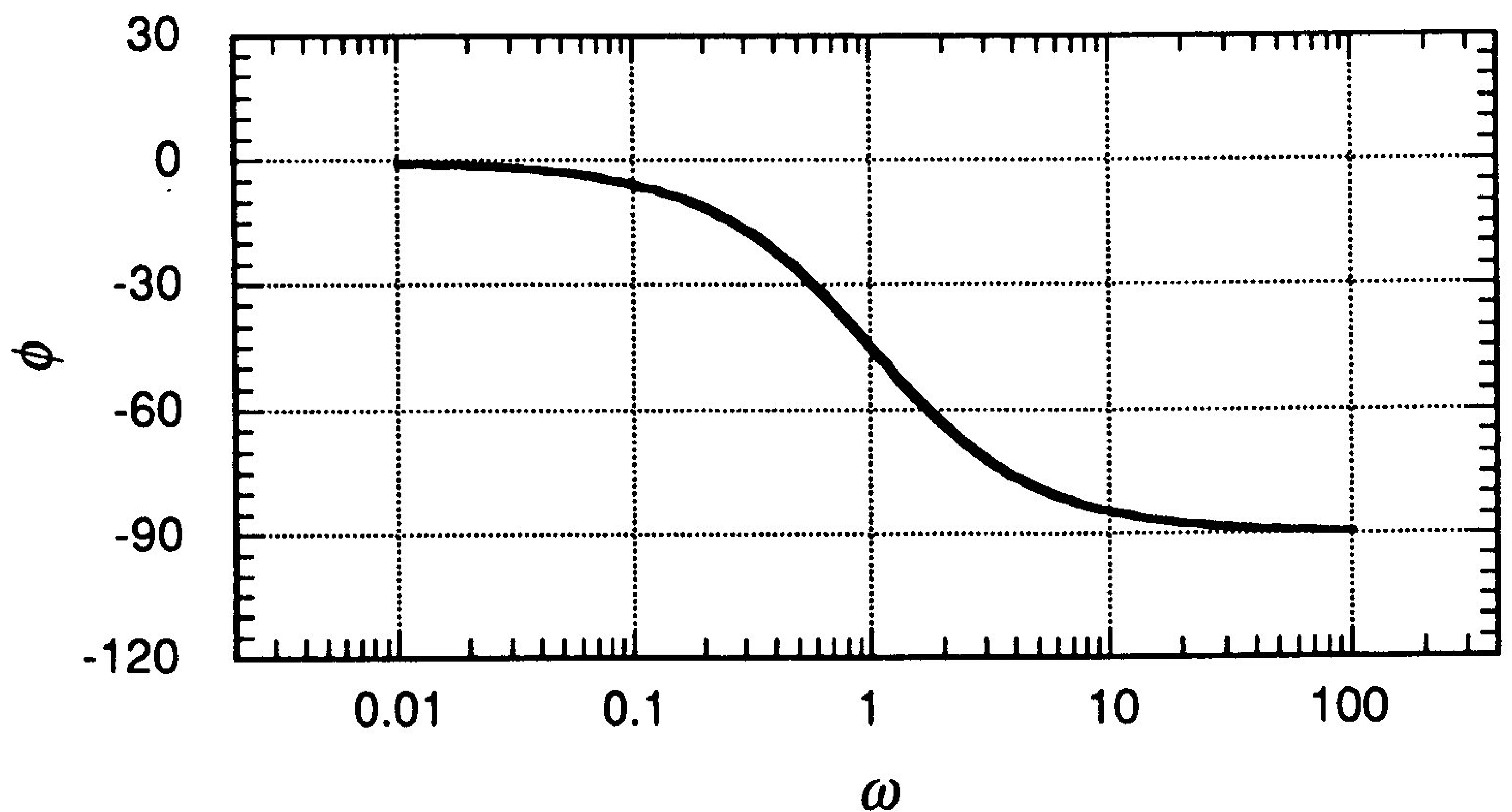


図 5.2(b) 位相線図

通常ボード線図では，ゲイン線図は $Log-Log$ プロットで，位相線図は $Semi-Log$ プロットで表す．ゲインの振幅比 AR は，次式のようなデシベル単位 $[dB]$ で表現することもある．

$$AR_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad (5.26)$$

位相は，習慣上 $radian$ ではなく $degree$ で表す．

1次遅れ要素のボード線図から次のようなことがわかる．時間的に激しく変動する入力（周波数が大きい）が1次遅れプロセスに入ると，その出力はかなり小さくなる．すなわち，周波数の高い入力に対する応答は，その振幅は小さくなり，また位相もマイナスの方向にずれる．1次遅れ要素は，最大 -90° の位相ずれが生じる．

上記のような特性をもつプロセスを，（低域）フィルター ($low-pass filter$) と呼ぶことがある．すなわち，入力信号の中で，周波数の低い成分は通過するが，周波数の高い成分はそのゲインが小さくなり，出力として現れなくなる．

1次遅れ要素のパラメータ，時定数 T ・ゲイン K を変化させると，ボード線図がどのように変わるか，各自検討すること。

積分要素の周波数伝達関数は，以下のようになる。

$$G(j\omega) = \frac{1}{s} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega} = 0 - j\frac{1}{\omega}$$

したがって，周波数特性は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{AR} &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega} \\ \phi &= \tan^{-1} \left\{ \frac{(-1/\omega)}{0} \right\} = \tan^{-1}(-\infty) = -(\pi/2) \end{aligned} \tag{5.27}$$

むだ時間要素の周波数伝達関数は，以下のようになる。

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= e^{-Ls} \Big|_{s=j\omega} = e^{-jL\omega} \\ &= \cos(L\omega) - j\sin(L\omega) \end{aligned}$$

したがって，周波数特性は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{AR} &= \sqrt{\{\cos(L\omega)\}^2 + \{-\sin(L\omega)\}^2} = 1 \\ \phi &= \tan^{-1} \left\{ \frac{-\sin(L\omega)}{\cos(L\omega)} \right\} = -L\omega \end{aligned} \tag{5.28}$$

積分要素およびむだ時間要素($L=1$)のボード線図を次に示す。

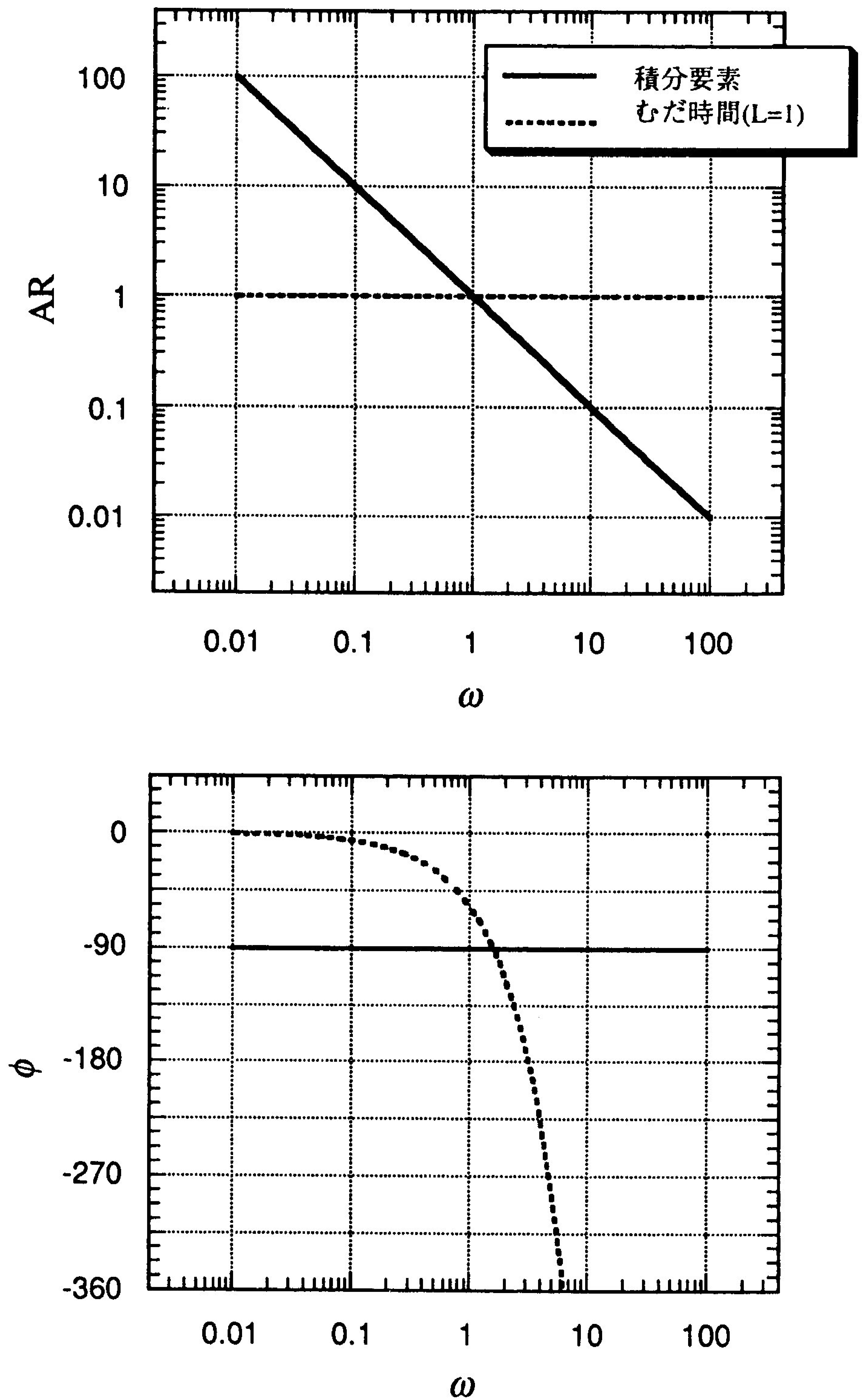


図 5・3 積分要素およびむだ時間要素のボード線図

次に、2次遅れ要素の周波数特性を調べる。周波数伝達関数は、

$$G(j\omega) = \frac{1}{T^2(j\omega)^2 + 2T\zeta(j\omega) + 1} = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$$

ここで、

$$\text{Re}(\omega) = \frac{1 - (T\omega)^2}{\{1 - (T\omega)^2\}^2 + (2T\zeta\omega)^2} \quad (5 \cdot 29)$$

$$\text{Im}(\omega) = \frac{-(2T\zeta\omega)}{\{1 - (T\omega)^2\}^2 + (2T\zeta\omega)^2}$$

したがって、ゲインおよび位相特性は、次のようになる。

$$\text{AR} = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (T\omega)^2\}^2 + (2T\zeta\omega)^2}} \quad (5 \cdot 30)$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left\{ \frac{2T\zeta\omega}{1 - (T\omega)^2} \right\}$$

いま、 $T=1$ とし ζ をパラメータとして、不足制動の2次遅れ系 ($\zeta < 1$) のボード線図を描くと次のようになる。

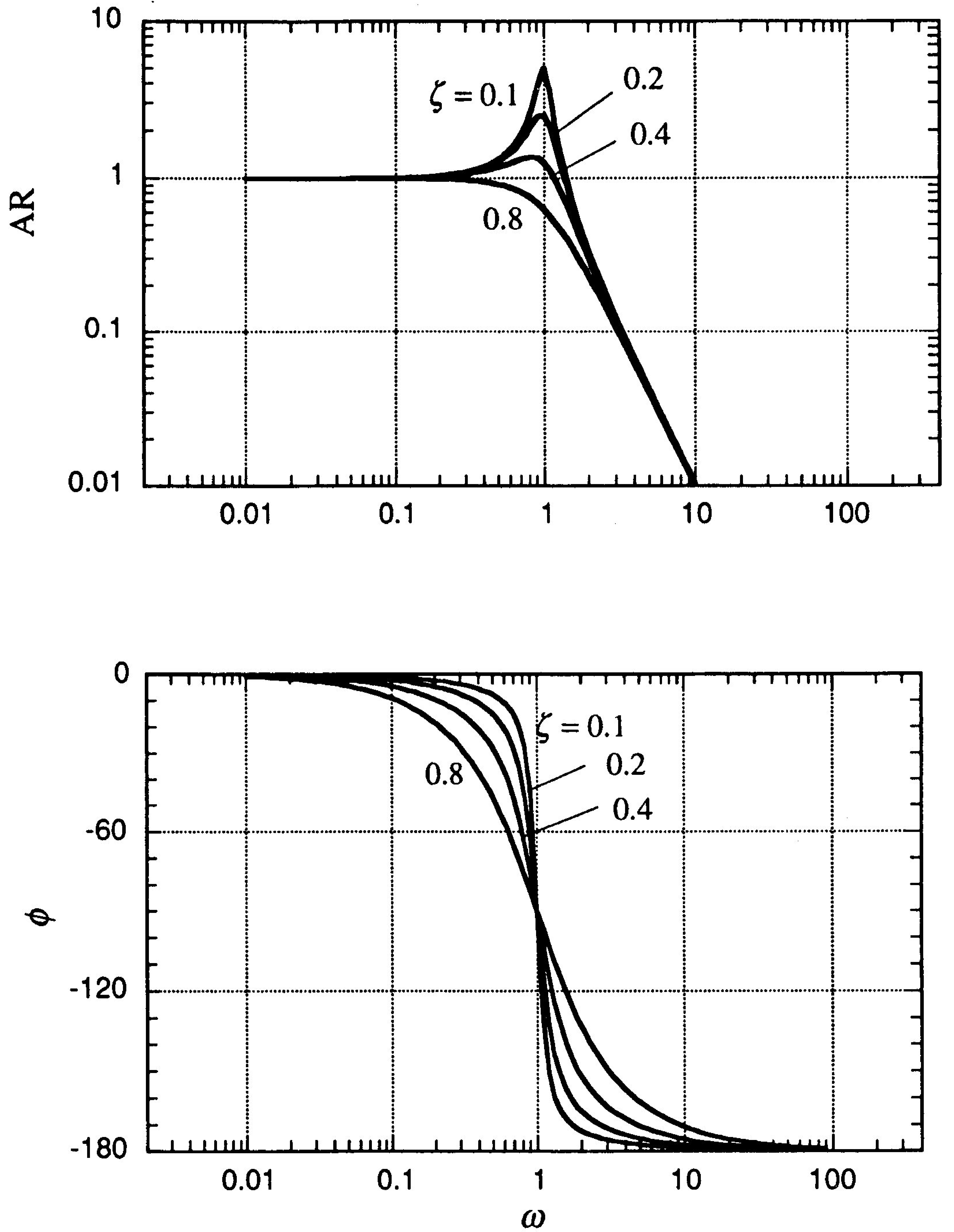


図 5・4 2次遅れ系のボード線図

図 5.4 のボード線図によると ζ が小さい場合には、ゲイン特性の AR が 1 より大きくなる場所がある。すなわち、ある特定の周波数を持つ入力（ここでは、 ω が 1 近傍の入力）に対して、その振幅より大きな振幅を持つ出力応答が得られる。このような現象を、共振 (*resonance*) と呼び、AR が最大となる周波数を共振周波数 (*resonance frequency*) という。不足制動の 2 次遅れ系の共振周波数と最大ゲインは、次式にて与えられる。

$$\begin{aligned}\omega_r &= \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\zeta^2} & (\zeta < 0.707) \\ (\text{AR})_{\max} &= \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} & (\zeta < 0.707)\end{aligned}\tag{5.31}$$

2 次遅れ系の位相は、 ω が大きくなるにつれてマイナスの方向にずれ、最大 -180° 遅れる。

プロセスの周波数特性を表す周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は、入力の周波数 ω をパラメータとする複素数ベクトルである。したがって、この複素ベクトルを複素平面上に表す方法がある。すなわち、周波数伝達関数の実数部と虚数部とを、 ω をパラメータとして s -平面上に点綴する方法である。このようにして描かれた図面を、ベクトル軌跡 (*vector locus*)・ベクトル線図あるいは、ナイキスト線図 (*Nyquist diagram*) という。

1 次遅れ系のベクトル軌跡を以下に示す。1 次遅れ系の周波数伝達関数は、(5.22)式にて与えられ、その実数部と虚数部は次式となる。

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\omega) &= \frac{K}{1+(T\omega)^2} \\ \operatorname{Im}(\omega) &= \frac{-KT\omega}{1+(T\omega)^2} \end{aligned} \quad (5.32)$$

いま、 $K=1, T=1$ とすると、そのベクトル軌跡は、次のようになる。

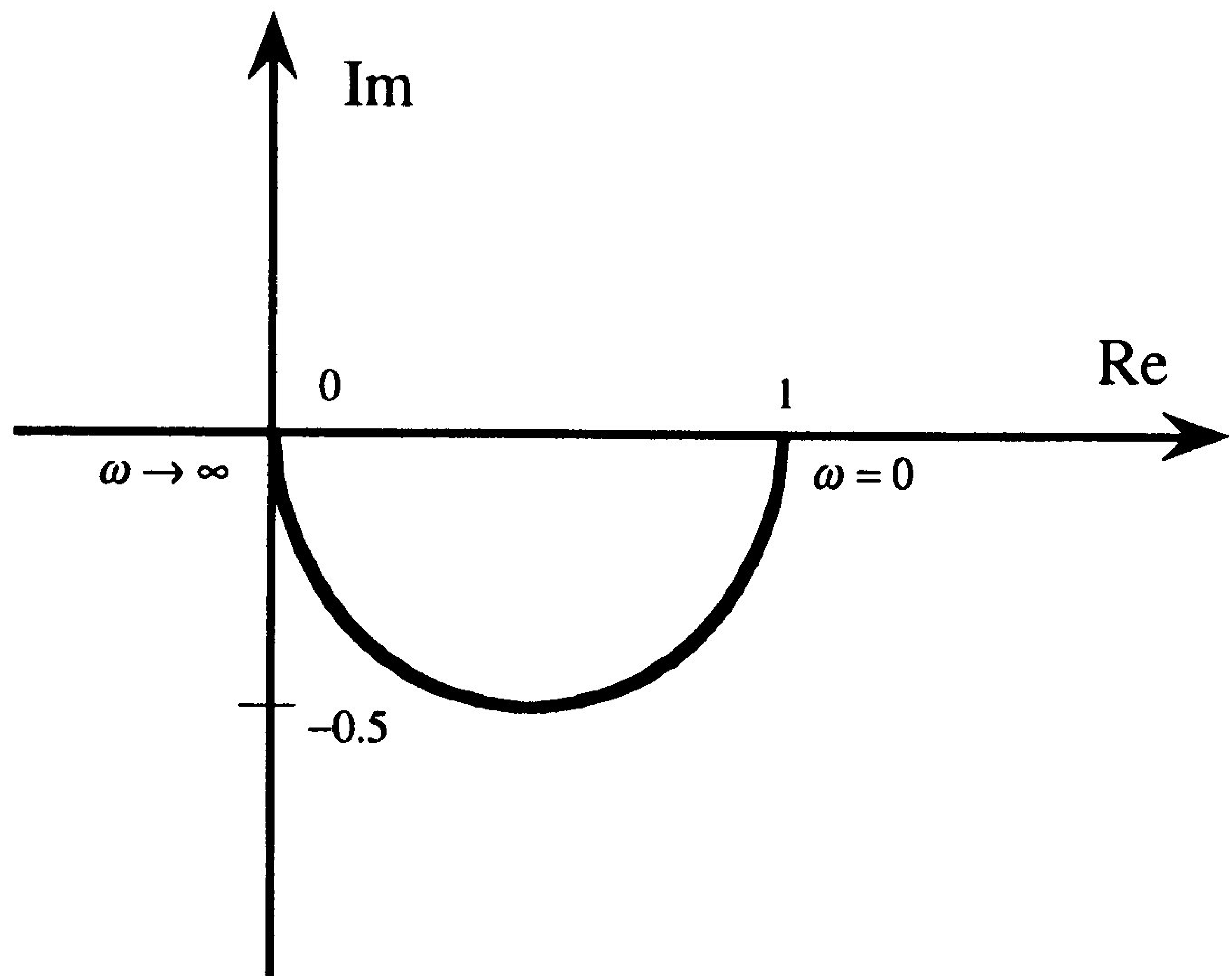


図 5.5 1 次遅れ系のベクトル軌跡

ベクトル軌跡は、上図のように周波数 ω がパラメータとなって、各 ω の値に対するベクトルの先端部を結んだものである。1 次遅れ系の位相特性は、0 から最大 -90° の遅れである。したがって、このベクトル軌跡は s -平面上では第 4 象限に限定される。

2 次遅れ系の周波数伝達関数の実数部および虚数部は、(5.29)式で与えられる。いま、 $T=1, \zeta=0.6$ としてベクトル軌跡を求めると図 5.6 のようになる。

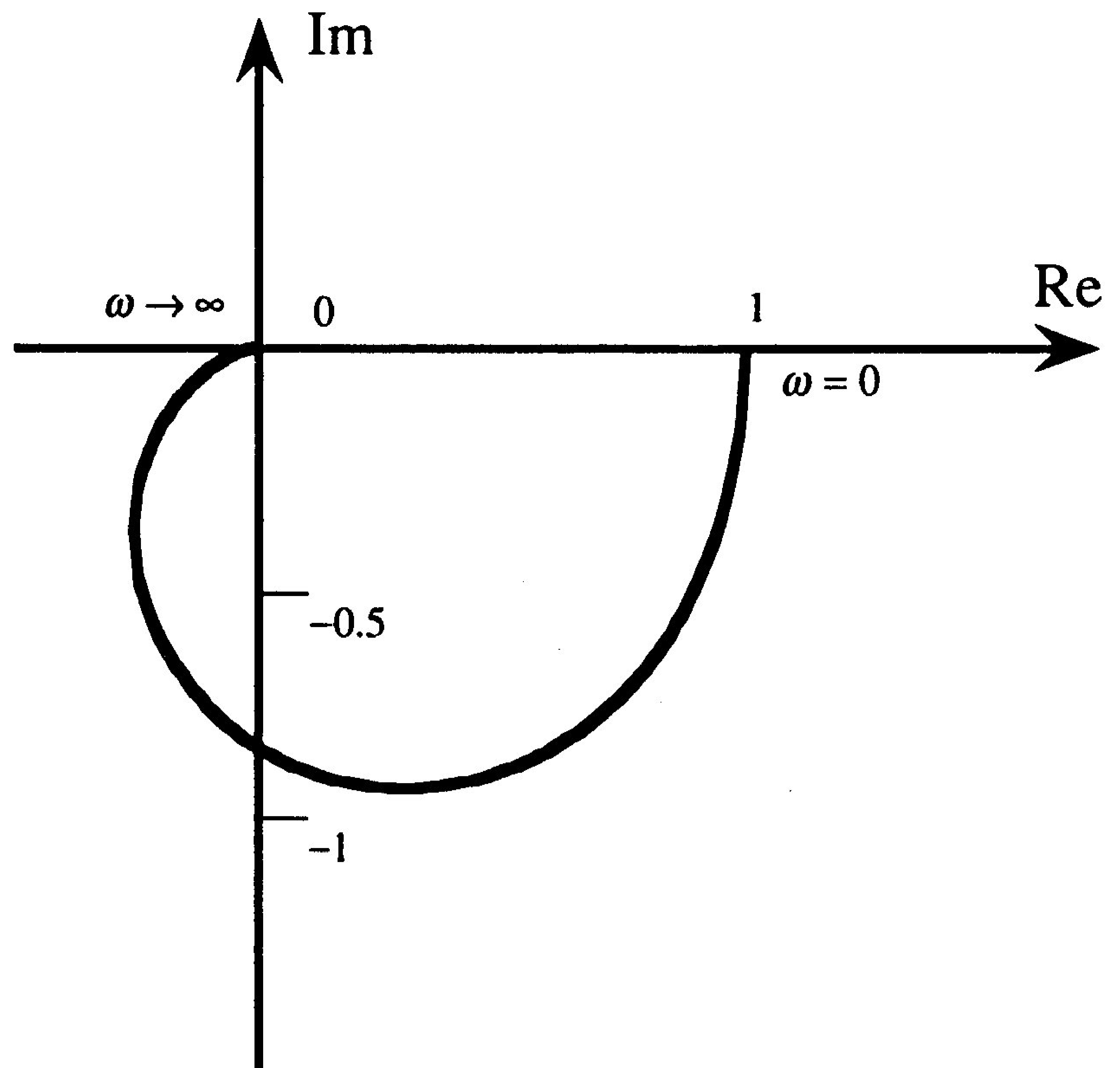


図 5・6 2次遅れ系のベクトル軌跡

2次遅れ系では、位相が最大 -180° 遅れるので、 s -平面でのベクトル軌跡は第4、第3象限に現れる。また、この例では、 $\zeta = 0.6$ としたため、ベクトルの絶対値が1より大きい部分が見られる。

周波数特性を図的に表現する他の方法として、周波数をゼロから無限大まで変化させて得られるゲインと位相の関係を、横軸に位相を縦軸にゲインを取って表すゲイン・位相線図 (*gain-phase diagram*) がある。