6　多数入力・出力系の動特性

ここでは，**状態空間法** (*state space analysis*) による多変数制御系の動特性の表現法についてごく簡単に説明する．この方法による制御系の解析方法は現代制御理論とよばれるものである．その詳細は，入門書である本書の範囲を超えるため，ここでは省略する．

6・1　多数入力・出力系の動特性

いま，２つの入力 $[u_1(t), u_2(t)]$ と２つの出力 $[y_1(t), y_2(t)]$ との間に互いに関連があり，それぞれの伝達関数が求まっていれば，次のようなブロック線図が描ける．

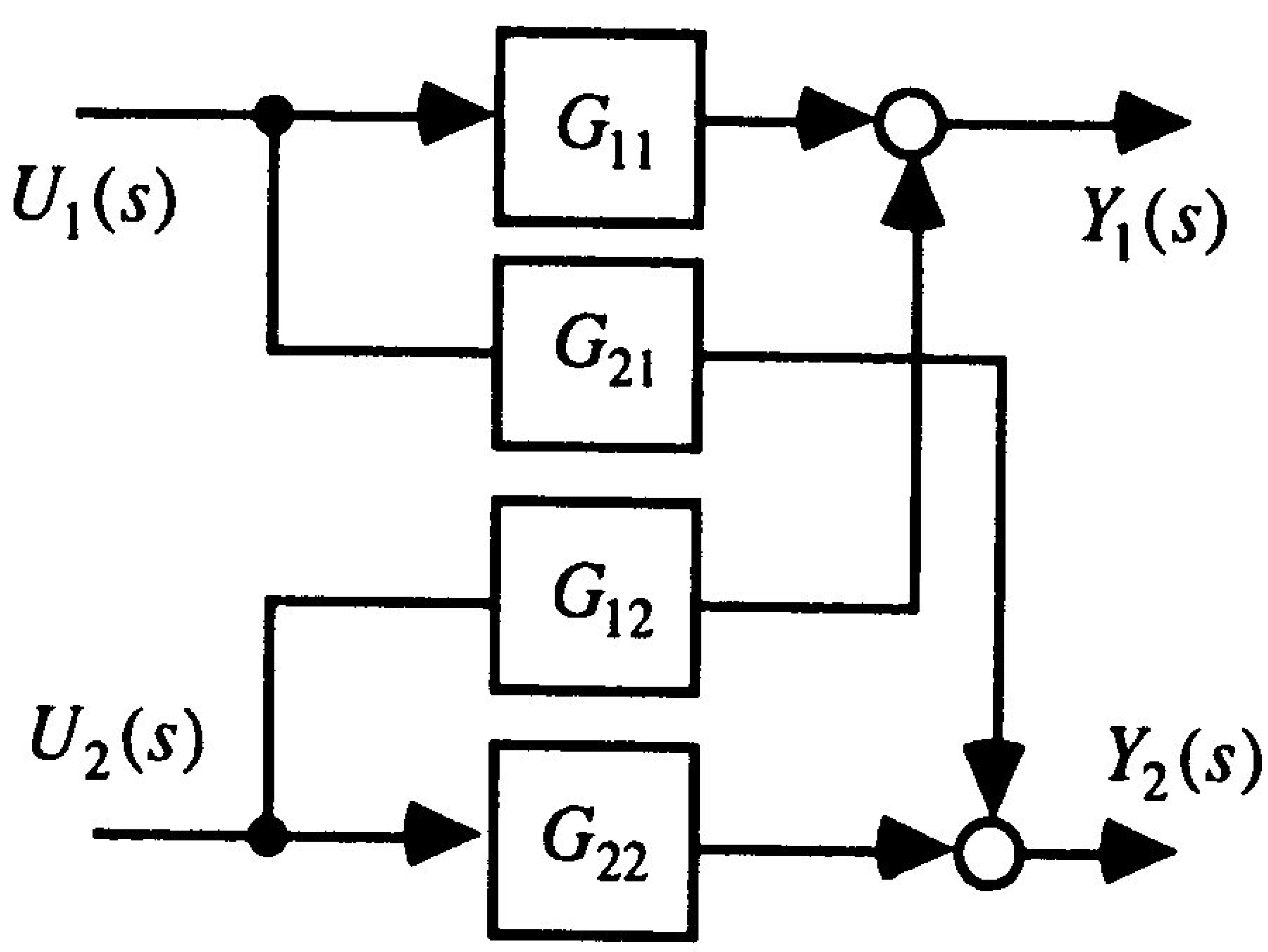

図6·1　２入力・２出力系

＊　動的システムの内部状態を表す変数．図６・２を参照

これらの変数の間の動特性を，過不足なく表現するため**状態変数**＊ (*state variable*) $[x_1(t), x_2(t)]$ を使うと，次のように表すことができ

る.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\
y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2
\end{aligned}
\tag{6·1}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2
\end{aligned}
\tag{6·2}
$$

(6・1), (6・2)式をラプラス変換して, 状態変数間の伝達関数を求めると,

$$
\begin{aligned}
Y_1(s) &= c_{11}X_1(s) + c_{12}X_2(s) \\
Y_2(s) &= c_{21}X_1(s) + c_{22}X_2(s)
\end{aligned}
\tag{6·3}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1(s) &= \left(\frac{1}{s-a_{11}}\right)\left\{a_{12}X_2(s) + b_{11}U_1(s) + b_{12}U_2(s)\right\} \\
X_2(s) &= \left(\frac{1}{s-a_{22}}\right)\left\{a_{21}X_1(s) + b_{21}U_1(s) + b_{22}U_2(s)\right\}
\end{aligned}
\tag{6·4}
$$

上記の関係を図示すると図6・2のようになる.

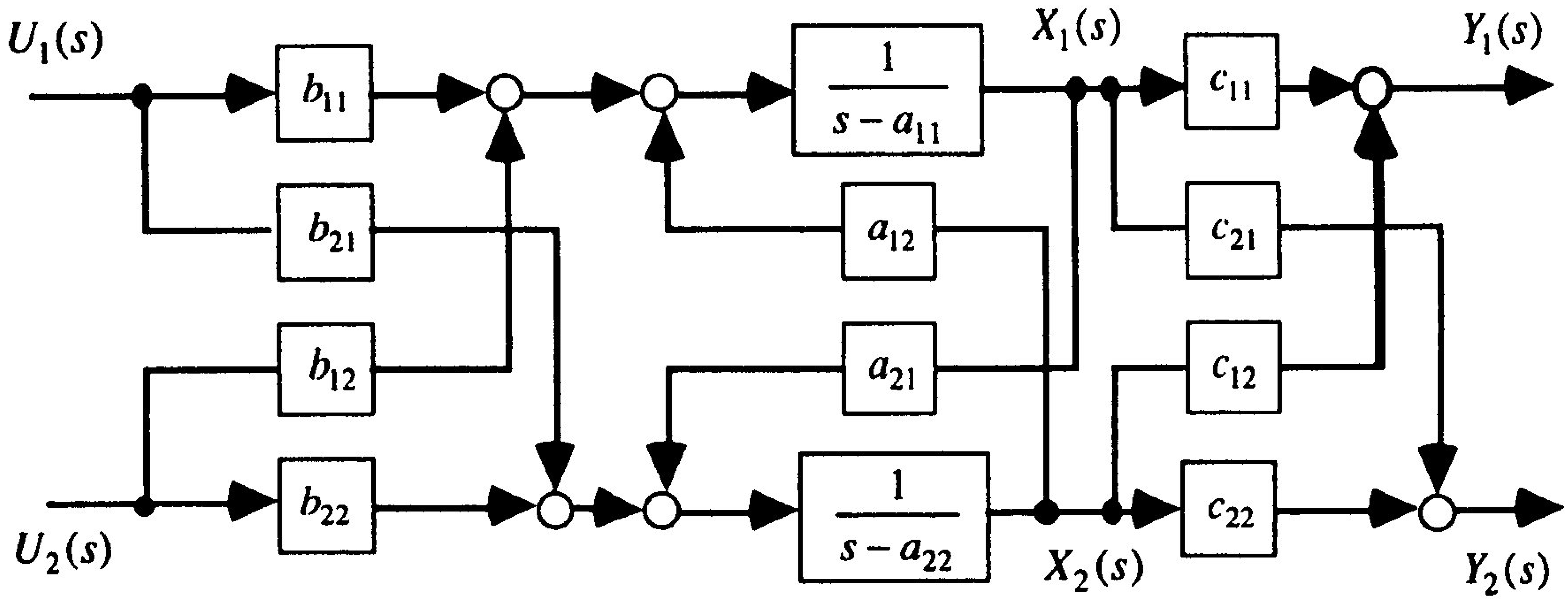

図6・2　　2入力・2出力系の一般形

図6·2を等価変換して整理すると図6·1となる.

(6·1), (6·2)式を一般化して，ベクトル表示すると次のようになる.

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t) \tag{6·5}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t) \tag{6·6}$$

ここで,

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ y_m(t) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ u_m(t) \end{bmatrix} \tag{6·7}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix} \tag{6·8}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,m} \end{bmatrix} \tag{6·9}$$

(6·5)～(6·9)式は，線型の m 入力，m 出力系の動特性を表す一般形で**状態方程式**(*state equation*)とも呼ばれる．この式にて $m=1$ とすると，1入力 $u_1(t)$，1出力 $y_1(t)$ 系における，n 次遅れ系の動特性を表現することができる.

6・2　状態方程式の解法

線型系の動特性を表す一般式，(6・5)，(6・6)式の解法を以下に示す．(6･6)式をラプラス変換すると次式が得られる．

$$sX(s)-x(0)=A\,X(s)+B\,U(s) \tag{6・10}$$

上式を整理すると，

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}B\,U(s) \tag{6・11}$$

ただし，I は $(n\times n)$ の単位行列で，$x(0)$ は状態変数の初期条件である．上式を逆ラプラス変換すると，

$$x(t)=\Phi(t)\,x(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)B\,u(\tau)d\tau \tag{6・12}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=L^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}=\exp(At)\\&=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\cdots\end{aligned} \tag{6・13}$$

上式の $\Phi(t)$ は，**状態推移行列** (*state transition matrix*) という．(6・12)式右辺の第２項は，たたみこみ積分である．(6・13)式の推移行列は，計算機を使うと精度よく級数の近似解が求まる．そこで，(6・12)式を数値積分することによって，一般解が得られる．この式の解析解の求め方については，制御論に関する上級の図書を参照すること．（高橋安人著，「システムと制御」，岩波書店［1968］）